

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

21. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2011*).

- a) Man bestimme das zweite Taylorpolynom T_2 der Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sin(x^2),$$

im Entwicklungspunkt $a = 0$.

- b) Man beweise für alle $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ die Abschätzung

$$|f(x) - T_2(x)| \leq \frac{1}{6}.$$

22. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010*). Gegeben sei die Funktion

$$f : [-1; \infty[\rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \sqrt{1+x}.$$

- a) Man bestimme mittels der Taylorformel ein Polynom p_2 zweiten Grades mit

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} (f(x) - p_2(x)) = 0.$$

- b) Man beweise für alle $x \in [0; \infty[$ die Abschätzung

$$|f(x) - p_2(x)| \leq \frac{1}{16} x^3.$$

23. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2008*). Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \cos^2 x.$$

- a) Man zeige für alle $n \geq 1$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

$$f^{(2n)}(x) = (-1)^n 2^{2n-1} (\cos^2 x - \sin^2 x).$$

- b) Man bestimme für alle $N \in \mathbb{N}$ das Taylorpolynom T_{2N} von f zum Entwicklungspunkt $a = 0$.

- c) Man bestimme ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$\left| f\left(\frac{1}{2}\right) - T_{2N}\left(\frac{1}{2}\right) \right| \leq 2 \cdot 10^{-4}.$$

24. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2013*).

- a) Für alle $x \in [0, \pi]$ beweise man die Ungleichung

$$\sin x \geq x - \frac{x^3}{6}.$$

- b) Man beweise diese Ungleichung für $x > \pi$.

Abgabe bis Mittwoch, den 4. Juni 2014, 14⁰⁰ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).