MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 5
21.05.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

17. Man untersuche die folgenden uneigentlichen Integrale auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert:

    a) $\displaystyle\int_0^e \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$ und $\displaystyle\int_e^\infty \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,dx$,

    b) $\displaystyle\int_{-\infty}^\infty e^x\left(\frac{\pi}{2} - \arctan x - \frac{1}{1+x^2}\right)dx$.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007).*

    a) Man beweise für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ die Beziehung

    $$\sum_{k=3}^{n} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \int_2^n \frac{1}{x(\ln x)^2}\,dx \leq \sum_{k=2}^{n-1} \frac{1}{k(\ln k)^2}.$$

    b) Man beweise die Ungleichung $\displaystyle\sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{k(\ln k)^2} \leq \frac{1}{\ln 2}$.

19. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).* Gegeben sei die Funktion

    $$f : [2;\infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\ln x}{x^2}.$$

    a) Man zeige, daß f monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

    b) Man bestimme mit Hilfe partieller Integration eine Stammfunktion von f.

    c) Man untersuche mit Hilfe des Integralvergleichskriteriums die Reihe

    $$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\ln n}{n^2}$$

    auf Konvergenz.

20. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ sei die Funktion

    $$f_n : [0;1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = \frac{2nx}{(1+nx^2)^2},$$

    gegeben. Man zeige, daß die Funktionenfolge $(f_n)_n$ punktweise auf $[0;1]$ gegen eine Riemann-integrierbare Grenzfunktion f konvergiert, dass aber $\displaystyle\left(\int_0^1 f_n(x)\,dx\right)_n$ nicht gegen $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ konvergiert.

Abgabe bis Mittwoch, den 28. Mai 2014, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).