MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 4
14.05.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

13. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2013).*

    a) Man berechne für $a \geq 2$ $\quad g(a) = \displaystyle\int_2^a \frac{x^2 - 2\,x - 1}{x - x^3}\,dx.$

    b) Man gebe $g'(a)$ an und zeige, daß g in $a = 1 + \sqrt{2}$ ein globales Maximum auf dem Intervall $[2, \infty[$ hat.

14. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2010).*

    Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei I_n definiert durch $\quad I_n = \displaystyle\int_0^\pi (\sin(x))^n\,dx$. Man zeige

$$I_n = \frac{n-1}{n}\,I_{n-2} \quad \text{für} \quad n \geq 2.$$

15. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).*

    a) Man berechne $\displaystyle\int_0^{2\pi} x^3 \cos x\,dx.$

    b) Man zeige, daß die Funktion

$$f :]0, \infty[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sin x}{x}$$

    auf dem Intervall $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4}\right]$ monoton fällt.

    c) Man beweise mit Hilfe von b) die Abschätzung

$$\frac{1}{3\sqrt{2}} \leq \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{4}} f(x)\,dx \leq \frac{1}{2}.$$

16. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Man beweise für $0 < a < 1$ die Gleichheit

$$\int_a^1 \frac{dx}{1+x^2} = \int_1^{\frac{1}{a}} \frac{dx}{1+x^2}$$

    und leite hieraus eine Funktionalgleichung für den Arcustangens her.

Abgabe bis Mittwoch, den 21. Mai 2014, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).