MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 2
30.04.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

5. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).*

   a) Man zeige
   $$\lim_{t\to 0} \frac{\ln(\cos(t))}{t^2} = -\frac{1}{2}.$$
   b) Man berechne
   $$\lim_{n\to\infty} \left(\cos\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\right)^n.$$

6. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).*

   a) Man zeige, daß die Funktion
   $$h :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \qquad h(x) = \ln\left(1 + \frac{1}{x}\right) - \frac{1}{x+1},$$
   streng monoton fällt und nur positive Werte annimmt.

   b) Man zeige, daß die Funktion
   $$f :]0;\infty[\to \mathbb{R}, \qquad f(x) = \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x,$$
   streng monoton steigt, und bestimme ihren Wertebereich.

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Sei a, $b \in]0,1[$. Man zeige, daß
   $$a^x + b^x = 1$$
   genau eine Lösung im Intervall $]0,\infty[$ hat.

8. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Man betrachte die Funktion
   $$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x^3}{x^2+1}.$$
   a) Man zeige, daß f streng monoton wächst.

   b) Für welche $x \in \mathbb{R}$ besitzt f lokal eine differenzierbare Umkehrfunktion
   $$g = f^{-1}?$$
   c) Man berechne
   $$g'\left(\frac{1}{2}\right).$$

Abgabe bis Mittwoch, den 7. Mai 2014, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).