MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

SS 2014
Blatt 1
23.04.2014

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung II“

1. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2008).* Man beweise mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung für alle $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$\frac{1}{n+1} \leq \ln(n+1) - \ln(n) \leq \frac{1}{n}$$

und schließe hieraus

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \geq \ln(n+1) \qquad \text{und} \qquad \ln(n) \geq \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\right) - 1.$$

2. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2002).* Für alle $x,\, y \in [-1;1]$ zeige man

$$\left|\sin\frac{x^3+x}{2} - \sin\frac{y^3+y}{2}\right| \geq \frac{\cos 1}{2} \cdot |x-y|.$$

3. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2010).* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit

$$|f(x) - f(y)| \leq |x-y|^2$$

für alle $x,\, y \in \mathbb{R}$.

   a) Man zeige, daß f differenzierbar ist.
   b) Man zeige, daß f konstant ist.

4. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2011).* Seien $a,\, b \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen mit $a < b$ sowie $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetige und auf $]a,b[$ differenzierbare Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f'(x) \leq g'(x)$ für alle $x \in \,]a,b[$. Man zeige mit Hilfe des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung, daß $f(x) < g(x)$ für alle $x \in [a,b]$ gilt.

Abgabe bis Mittwoch, den 30. April 2014, 14^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).