

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

45. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x^3 + x + 1| + \sqrt{x^4 + 1}$.
- Man zeige, daß f eine stetige Funktion ist.
 - Man zeige, daß f eine Nullstelle besitzt, und gebe ein Intervall der Länge 1 an, in dem eine Nullstelle von f liegt.
 - Man bestimme ein Intervall der Länge $\frac{1}{2}$, in dem f eine Nullstelle besitzt.
46. Seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.
- Man zeige, daß die beiden Graphen G_f und G_g mindestens einen Schnittpunkt besitzen.
 - Man gebe für $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = 2x + 1$, und $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, einen Schnittpunkt von G_f und G_g explizit an.
 - Man zeige, daß die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^4 + 1}$, und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$, mindestens zwei Schnittpunkte besitzen.
47. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006*). Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. Man beweise, daß die Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

in den Intervallen $]a, b[$ und $]b, c[$ jeweils mindestens eine Lösung besitzt.

48. a) Man betrachte eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [-1, 1].$$

Man zeige, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß

$$f(x) \geq \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in [-1, 1]$$

gilt.

- b) Man zeige, daß die Aussage von a)
- sowohl für eine unstetige Funktion $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$
 - als auch für eine stetige Funktion $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$
- im allgemeinen falsch ist.