

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

41. Für die reellen Parameter $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda x + \mu, & \text{für } x < -1, \\ x^2 + \lambda \mu x + 1, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \mu x + \lambda, & \text{für } 1 < x, \end{cases}$$

gegeben. Man bestimme alle Paare $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die f stetig ist, und skizziere für diese Fälle den Graphen G_f .

42. Man zeige, daß die *Dirichlet-Funktion*

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 1, & \text{für } x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \end{cases}$$

in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$ unstetig ist.

43. (*Staatsexamensaufgabe Herbst 2002*). Sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine beschränkte Funktion. Man zeige, daß die Funktion $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $g(x) = x f(x)$, in $a = 0$ stetig ist.

44. Sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion auf der Definitionsmenge $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $f_0 = f|_{D_0}$ die Einschränkung von f auf $\emptyset \neq D_0 \subseteq D$. Man beweise oder widerlege:

- a) Ist f injektiv, so auch f_0 .
- b) Ist f_0 injektiv, so auch f .
- c) Ist f surjektiv, so auch f_0 .
- d) Ist f_0 surjektiv, so auch f .
- e) Ist f stetig in $a \in D_0$, so auch f_0 .
- f) Ist f_0 stetig in $a \in D_0$, so auch f .