MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

21. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n \cdot (1 + (-1)^n) \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n .$$

22. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Sei a eine reelle Zahl und $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Es sei

$$\lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2.$$

Man beweise: Ist c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so ist $c = a$ oder $c = -a$.

23. Man betrachte die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Man zeige $\quad a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2}\quad$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$ und folgere daraus, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist.

24. Man zeige, daß die für einen beliebigen Startwert $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ durch

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau drei Häufungspunkte besitzt.