MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

17. Seien die reellen Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

b) Man untersuche, für welche Werte von α, β und welche Startwerte a_0 die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch

$$a_{n+1} = \frac{1}{4}\, a_n^2 + \frac{3}{4}, \qquad \text{mit} \quad a_0 \in [1,3]\,.$$

a) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für alle $a_0 \in [1,3]$ monoton fallend ist.

b) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ in Abhängigkeit von a_0, falls der Grenzwert existiert.

19. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\, n^{n+1}}$$

konvergiert, und bestimme den Grenzwert der Folge.

20. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \quad \text{und} \quad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

a) Man zeige $\quad \dfrac{a_{n+1}}{a_n} \geq 1 \quad$ und $\quad \dfrac{b_n}{b_{n+1}} \geq 1 \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.