

## Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

9. Man untersuche die Folgen

$$\left( \frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} \right)_{n \in \mathbb{N}}, \quad \left( \frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}} \right)_{n \in \mathbb{N}} \quad \text{und} \quad ((2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2)_{n \in \mathbb{N}}$$

auf Konvergenz und gebe gegebenenfalls den Grenzwert an.

10. Für die positiven Parameter  $x, y \in \mathbb{R}^+$  betrachte man die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

- a) Sei zunächst  $0 < x < 1$ . Man zeige, daß dann  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Nullfolge ist.
- b) Sei nun  $x = 1$ . Man zeige, daß dann  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  konvergiert, und bestimme in Abhängigkeit von  $y > 0$  ihren Grenzwert.
- c) Sei schließlich  $1 < x$ . Man untersuche  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  in Abhängigkeit von  $y > 0$  auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

11. Gegeben seien die Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ,  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \sqrt{n + 1000} - \sqrt{n}, \quad b_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} \quad \text{und} \quad c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n}$$

für alle  $n \in \mathbb{N}$ . Man zeige:

- a) Für alle  $n \in \mathbb{N}$  mit  $n < 10^6$  gilt  $a_n > b_n > c_n$ .
- b) Es ist  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \frac{1}{2}$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} c_n = +\infty$ .

12. Man gebe jeweils Beispiele von Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$  und  $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$  an, so daß die Folge  $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$

- a) gegen  $+\infty$  bestimmt divergiert (uneigentlich konvergiert).
- b) gegen  $-\infty$  bestimmt divergiert (uneigentlich konvergiert).
- c) gegen eine beliebig vorgegebene reelle Zahl  $c \in \mathbb{R}$  konvergiert.
- d) beschränkt ist, aber divergiert.