MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

# Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

5. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, und berechne für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt $|a_n - a| \leq \varepsilon$.

6. a) Man zeige die *Bernoullische Ungleichung*

$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N} \text{ und alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1$$

mit Hilfe vollständiger Induktion.

b) Man beweise mit Hilfe des Schrankenlemmas unter Verwendung von a) die Konvergenz der Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

7. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2006).* Man zeige, daß die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1 + 2 + \ldots + n}{n^2} \qquad \text{und} \qquad b_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{7^k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergieren, und berechne ihre Grenzwerte.

8. Sei $r \in \mathbb{R}$ eine beliebige reelle Zahl.

a) Man begründe, daß es für alle $n \in \mathbb{N}$ rationale Zahlen $a_n$ und $b_n \in \mathbb{Q}$ mit $r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1}$ und $r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}$ gibt.

b) Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$ ist.

c) Man zeige, daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton fallende Folge rationaler Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$ ist.