MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 1
21.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} \qquad \text{bzw.} \qquad b_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Man bestimme jeweils die ersten fünf Folgenglieder.
   b) Man untersuche $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.
   c) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach.

2. Gegeben sei $a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

   a) Man zeige mit Hilfe von vollständiger Induktion $a_n = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.
   b) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ (mit $n_0 \geq 2$) mit $|a_n - a| < \frac{1}{1000}$ für alle $n \geq n_0$.

3. a) Man zeige $n^3 < 2^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$.
   b) Unter Verwendung von a) weise man anhand der Definition nach, daß die Folge $\left(\frac{n^2}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist.

4. Es sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege:

   a) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist auch die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.
   b) Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist auch die Folge $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
   c) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so ist auch $(a_n\,b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.