MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Repetitorium
03.02.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).* Für $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ sei

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}.$$

   a) Man zeige

$$a_n = \frac{2\,n}{n+1} \qquad \text{für alle} \qquad n \geq 2$$

   mit Hilfe vollständiger Induktion.

   b) Man beweise, daß die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ einen Grenzwert a besitzt.

   c) Man finde zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \geq 2$, so daß für alle $n \geq n_0$

$$|a_n - a| < \varepsilon$$

   gilt.

2. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/14).*

   a) Man zeige anhand der Definition, daß die Folge

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2\,\sin(n)}{n^2+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 10^{-3}$ für alle $n \geq n_0$.

   b) Man zeige, daß die Folge

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad b_n = \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.

   c) Man zeige mit Hilfe des Schrankenlemmas, daß die Folge

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sqrt[n]{3^n+5^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   konvergiert.

3. a) *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).* Man berechne die Grenzwerte
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to\infty} \frac{e^{-x^3}}{e^{-x^2}}.$$
   b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Man beweise, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} \qquad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}$$
   konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.

4. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2004).* Gegeben sei die durch
$$a_1 = 3 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2+4}{2\,a_n} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}$$
   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Man zeige $a_n \geq 2$ für alle $n\in\mathbb{N}$.
   b) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fällt.
   c) Man berechne den Grenzwert a der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

5. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2017).* Sei die positive reelle Zahl $r > 0$ fest gewählt. Man betrachte die durch
$$a_1 = r \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \sqrt[3]{r\,a_n^2 + a_n} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}$$
   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   a) Man zeige, daß $0 < a_n < r+1$ für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt.
   b) Man zeige, daß die Folge streng monoton wächst.
   c) Man zeige, daß die Folge konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

6. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2018).* Es seien $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente reelle Folgen mit verschiedenen Grenzwerten. Man beweise oder widerlege:
   a) Die durch
$$a_n = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$
   für alle $n\in\mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.
   b) Die durch
$$b_n = \begin{cases} x_n + y_{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} + y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$
   für alle $n\in\mathbb{N}$ definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.
   c) Die durch
$$c_1 = x_1 - y_1 \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = c_n + \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{für alle} \quad n\in\mathbb{N}$$
   rekursiv definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.

7. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2018).*

a) Man beweise

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man berechne den Wert der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.$$

8. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/14).*

a) Man untersuche die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}}$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

b) Man untersuche mit Hilfe des Leibnizschen Konvergenzkriteriums sowie des Cauchyschen Verdichtungskriteriums die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln(n)}$$

auf Konvergenz sowie absolute Konvergenz.

9. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).*

a) Man zeige

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2n}$$

für $n \geq 2$ und bestimme damit, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$$

konvergiert.

b) Man bestimme, ob die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$$

konvergiert.

10. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2019).* Man überprüfe die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! + n^n}$$

auf Konvergenz.

11. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2013/14).*

a) Man bestimme alle $p \in \mathbb{N}_0$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + 1}$$

konvergiert.

b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}^+$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$$

konvergiert, und berechne hierfür ihre Summe.

c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n}$$

konvergiert.

12. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2011/12).* Gegeben seien die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{für } x < 0, \\ p(x), & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{für } x \geq 1 \end{cases}$$

und

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = \begin{cases} p(x), & \text{für } x \leq 2, \\ -2x + 4, & \text{für } x > 2; \end{cases}$$

dabei ist $p(x)$ eine Polynomfunktion vom Grad 2.

a) Man bestimme $p(x)$ derart, daß sowohl f als auch g stetig sind.

b) Man skizziere den Graphen von f.

c) Man bestimme ein maximales Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$, welches 0 enthält, so daß die Einschränkung $g\big|_I$ umkehrbar ist, und gebe die Umkehrfunktion explizit an.

13. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2017/18).* Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + \ln x;$$

die Eigenschaften der Exponentialfunktion $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und des natürlichen Logarithmus $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ dürfen verwendet werden.

   a) Man zeige anhand der Definition, daß f streng monoton wachsend ist,

   b) Man bestimme den Wertebereich W_f von f.

   c) Man skizziere die Graphen $G_{\exp}$ und $G_{\ln}$ sowie G_f und $G_{f^{-1}}$.

14. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2017/18).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x - 2.$$

   a) Man zeige, daß die Funktion f stetig ist.

   b) Man zeige, daß die Funktion f eine Nullstelle besitzt.

   c) Man berechne $f(\frac{1}{4})$ und $f(\frac{1}{2})$ und entscheide mit Begründung, ob f umkehrbar ist.

15. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2011/12).* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und monoton fallende Funktion.

   a) Man zeige, daß es ein $\xi \in \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = \xi$ gibt.

   b) Man entscheide, ob die Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ von a) eindeutig bestimmt ist, und begründe die Entscheidung.

16. *(Klausuraufgabe Wintersemester 2017/18).* Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\arctan x}{x^2 + 1}.$$

   a) Man berechne $f(1)$ und zeige $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

   b) Man zeige $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \subseteq W_f$ mit Hilfe des Zwischenwertsatzes.

   c) Man zeige: für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 2$ gilt $|f(x)| < \frac{\pi}{10}$.

   d) Man zeige mit Hilfe des Satzes von Weierstraß: es gibt p, $q \in [-2, 2]$ mit $W_f = [f(p), f(q)]$.

Bitte beachten: Die Aufgaben dieses Repetitoriums sollen der eigenständigen Wiederholung und Vertiefung des Stoffes der Vorlesung dienen; die Bearbeitungen sind nicht abzugeben. Die Lösungsvorschläge werden zu gegebener Zeit veröffentlicht.