

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

45. a) Als Polynomfunktion ist $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$, insbesondere stetig, und wegen

$$f(-1) = (-1)^3 + (-1) + 1 = -1 < 0$$

sowie

$$f(0) = 0^3 + 0 + 1 = 1 > 0$$

existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]-1, 0[$ mit $f(\xi) = 0$; demnach besitzt f im Intervall $]-1, 0[$ der Intervalllänge 1 eine Nullstelle.

Für eine beliebige Nullstelle $\zeta \in \mathbb{R}$ von f gilt nun $\xi^3 + \xi + 1 = \zeta^3 + \zeta + 1$ und damit

$$\begin{aligned} 0 &= (\xi^3 + \xi + 1) - (\zeta^3 + \zeta + 1) = (\xi^3 - \zeta^3) + (\xi - \zeta) = \\ &= (\xi - \zeta) (\xi^2 + \xi\zeta + \zeta^2) + (\xi - \zeta) = (\xi - \zeta) \left(\left(\xi + \frac{1}{2}\zeta \right)^2 + \frac{3}{4}\zeta^2 + 1 \right); \end{aligned}$$

wegen $\left(\xi + \frac{1}{2}\zeta \right)^2 + \frac{3}{4}\zeta^2 + 1 \geq 1$ folgt $\xi - \zeta = 0$, also $\xi = \zeta$. Damit besitzt f genau eine Nullstelle.

- b) Nach dem Nullstellensatz muß die Nullstelle ξ wegen

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{8} > 0$$

zunächst im Intervall $]-1, -\frac{1}{2}[$ der Intervalllänge $\frac{1}{2}$, wegen

$$f\left(-\frac{3}{4}\right) = \left(-\frac{3}{4}\right)^3 - \frac{3}{4} + 1 = -\frac{11}{64} < 0$$

dann im Intervall $]-\frac{3}{4}, -\frac{1}{2}[$ der Intervalllänge $\frac{1}{4}$ und wegen

$$f\left(-\frac{5}{8}\right) = \left(-\frac{5}{8}\right)^3 - \frac{5}{8} + 1 = \frac{67}{512} > 0$$

schließlich im Intervall $]-\frac{3}{4}, -\frac{5}{8}[$ der Intervalllänge $\frac{1}{8}$ liegen.

46. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ betrachten wir die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

a) Die Funktion

$$f_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - nx + 1.$$

ist als Polynomfunktion stetig und besitzt wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f_n(1) = 1 - n + 1 = 2 - n \underset{n \geq 3}{\leq} 0$$

nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle $\xi_n \in]0, 1[$. Für eine beliebige Nullstelle $\zeta_n \in]0, 1[$ gilt

$$\xi_n^n - n\xi_n + 1 = 0 = \zeta_n^n - n\zeta_n + 1, \quad \text{also} \quad \xi_n^n - \zeta_n^n = n\xi_n - n\zeta_n,$$

woraus sich

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot (\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \dots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1}) = n \cdot (\xi_n - \zeta_n)$$

und damit

$$(\xi_n - \zeta_n) \cdot \left(\overbrace{\underbrace{\xi_n^{n-1}}_{<1} + \underbrace{\xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n}_{<1} + \dots + \underbrace{\xi_n \cdot \zeta_n^{n-2}}_{<1} + \underbrace{\zeta_n^{n-1}}_{<1}}^{n \text{ Summanden}} - n \right) = 0$$

ergibt. Da nun der zweite Faktor $\xi_n^{n-1} + \xi_n^{n-2} \cdot \zeta_n + \dots + \xi_n \cdot \zeta_n^{n-2} + \zeta_n^{n-1} - n$ des Produkts stets kleiner Null, folgt schon $\xi_n - \zeta_n = 0$ bzw. $\xi_n = \zeta_n$. Folglich gibt es genau eine Nullstelle $\xi_n \in]0, 1[$.

b) Wegen

$$f_n(0) = 1 > 0 \quad \text{und} \quad f_n\left(\frac{2}{n}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^n - n \cdot \frac{2}{n} + 1 = \underbrace{\left(\frac{2}{n}\right)^n}_{<1} - 1 < 0$$

besitzt die stetige Funktion f_n nach dem Nullstellensatz mindestens eine Nullstelle im Intervall $]0, \frac{2}{n}[$; da ξ_n gemäß a) die einzige Nullstelle von f_n sogar im größeren Intervall $]0, 1[$ ist, folgt $\xi_n \in]0, \frac{2}{n}[$. Wegen

$$0 \leq \xi_n \leq \frac{2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

ergibt sich mit Hilfe des Schrankenlemmas dann $\lim_{n \rightarrow \infty} \xi_n = 0$.

47. a) Im Falle $f(0) = f(a)$ kann $\xi = a$ gewählt werden; sei also im folgenden $f(0) \neq f(a)$. Wir betrachten die Funktion

$$g : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f(x - a).$$

Da

$$f_1 : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x - a,$$

als lineare Funktion stetig ist, ist wegen der Stetigkeit von f auch

$$f_2 = f \circ f_1 : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = f(f_1(x)) = f(x - a),$$

stetig, und damit ergibt sich die Stetigkeit von

$$g = f|_{[0,a]} - f_2 : [0, a] \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = f(x) - f_2(x) = f(x) - f(x-a);$$

darüber hinaus gilt

$$g(0) \cdot g(a) = (f(0) - f(-a))(f(a) - f(0)) = -(f(a) - f(0))^2 < 0.$$

Nach dem Nullstellensatz existiert also ein $\xi \in [0, a]$ mit $g(\xi) = 0$; damit gilt aber $f(\xi) = f(\xi - a)$.

- b) Die Funktion $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)(x + 2a)$ ist (als Polynomfunktion) stetig, und es gilt $f(-a) = 0 = f(a)$. Für $\xi \in [0, a]$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\xi) = f(\xi - a) &\iff (\xi^2 - a^2)(\xi + 2a) = ((\xi - a)^2 - a^2)((\xi - a) + 2a) \\ &\iff (\xi - a)(\xi + a)(\xi + 2a) = (\xi^2 - 2\xi a)(\xi + a) \\ &\iff_{\xi+a>0} (\xi - a)(\xi + 2a) = \xi^2 - 2\xi a \\ &\iff \xi^2 + a\xi - 2a^2 = \xi^2 - 2\xi a \\ &\iff 3\xi a = 2a^2 \iff_{a>0} \xi = \frac{2}{3}a \end{aligned}$$

48. Die beiden auf dem abgeschlossenen Intervall $[-1, 1]$ definierten und als stetig vorausgesetzten Funktionen $f : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ besitzen nach dem Satz von Weierstraß jeweils ein globales Maximum, es gibt also $p, q \in [-1, 1]$ mit $f(x) \leq f(p)$ und $g(x) \leq g(q)$ für alle $x \in [-1, 1]$; damit gilt

$$f(p) = \sup \{f(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = \sup \{g(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = g(q).$$

Für $p = q$ wählen wir $\xi = p \in [-1, 1]$, und es gilt $f(\xi) = f(p) = g(q) = g(\xi)$. Für $p \neq q$ können wir (aufgrund der bezüglich f und g symmetrischen Problemstellung) schon $p < q$ annehmen und betrachten die Hilfsfunktion

$$h : [p, q] \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

Damit ist h als Differenz der stetigen Funktionen f und g selbst stetig mit

$$\begin{aligned} h(p) = f(p) - g(p) &\stackrel{\geq}{g(p) \leq g(q)} f(p) - g(q) = 0, \\ h(q) = f(q) - g(q) &\stackrel{\leq}{f(q) \leq f(p)} f(p) - g(q) = 0, \end{aligned}$$

und nach dem Zwischenwertsatz gibt es ein $\xi \in [p, q] \subseteq [-1, 1]$ mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) = g(\xi)$.