

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

41. Für die reellen Parameter  $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$  ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu, & \text{für } x < -1, \\ (x - \lambda)(x - \mu), & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \lambda|x - 2| + \mu & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

zu betrachten.

a) Wir treffen die folgende Fallunterscheidung bezüglich  $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ :

- Fall 1:  $a < -1$ : Die Polynomfunktion

$$f_1 : ]-\infty, -1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x^2 + 8,$$

und die lineare Funktion

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \lambda x + \mu,$$

sowie die Wurzelfunktion

$$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

sind stetig; damit ist auch die Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_1 : ]-\infty, -1[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_1(x)) = \sqrt{x^2 + 8},$$

stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

$$f|_{]-\infty, -1[} = f_2 \circ f_4 : ]-\infty; -1[ \rightarrow \mathbb{R}, \\ f|_{]-\infty, -1[}(x) = f_2(f_4(x)) = \lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu,$$

von  $f$  auf das Intervall  $]-\infty, -1[$  stetig; folglich ist  $f$  in  $a$  stetig.

- Fall 2:  $-1 < a < 1$ : Die Einschränkung  $f|_{[-1, 1]}$  von  $f$  auf das Intervall  $[-1, 1]$  ist wegen

$$f(x) = x^2 - (\lambda + \mu)x + \lambda\mu$$

für alle  $x \in [-1, 1]$  eine quadratische Funktion und damit insbesondere stetig; folglich ist  $f$  in allen Punkten  $a \in ]-1, 1[$  stetig.

- Fall 3:  $1 < a$ : Die linearen Funktionen

$$f_5 : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_5(x) = x - 2,$$

und

$$f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, f_2(x) = \lambda x + \mu,$$

sowie die Betragsfunktion

$$f_6 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_6(x) = |x|,$$

sind stetig; damit ist auch die Komposition

$$f_7 = f_6 \circ f_5 : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f_7(x) = f_6(f_5(x)) = |x - 2|,$$

stetig. Demnach ist auch die Einschränkung

$$f|_{]1, \infty[} = f_2 \circ f_7 : ]1, \infty[ \rightarrow \mathbb{R},$$

$$f|_{]1, \infty[}(x) = f_2(f_7(x)) = \lambda |x - 2| + \mu,$$

von  $f$  stetig; folglich ist  $f$  in  $a$  stetig.

b) Wegen

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^+} ((x - \lambda)(x - \mu)) = (-1 - \lambda)(-1 - \mu) = f(-1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Wurzelfunktion)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow -1^-} (\lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu) = \lambda \sqrt{(-1)^2 + 8} + \mu = 3\lambda + \mu;$$

damit ist  $f$  im Punkt  $a = -1$  genau dann stetig, wenn

$$(1 + \lambda)(1 + \mu) = 3\lambda + \mu$$

gilt; wegen  $(1 + \lambda)(1 + \mu) = 1 + \lambda + \mu + \lambda\mu$  ist dies aber zu  $1 + \lambda\mu = 2\lambda$  äquivalent. Wegen

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} ((x - \lambda)(x - \mu)) = (1 - \lambda)(1 - \mu) = f(1)$$

und (wegen der Stetigkeit der Betragsfunktion)

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} (\lambda |x - 2| + \mu) = \lambda |1 - 2| + \mu = \lambda + \mu$$

damit ist  $f$  im Punkt  $a = 1$  genau dann stetig, wenn

$$(1 - \lambda)(1 - \mu) = \lambda + \mu$$

gilt; wegen  $(1 - \lambda)(1 - \mu) = 1 - \lambda - \mu + \lambda\mu$  ist dies aber zu  $1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu$  äquivalent. Die Funktion  $f$  ist also genau dann stetig, wenn

$$1 + \lambda\mu = 2\lambda \quad \text{und} \quad 1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu$$

gilt. Aus beiden Gleichungen zusammen folgt

$$2\lambda = 1 + \lambda\mu = 2\lambda + 2\mu,$$

also  $\mu = 0$  und  $\lambda = \frac{1}{2}$ ; umgekehrt erfüllt das Paar  $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, 0)$  beide Gleichungen.

Die also genau im Falle  $(\lambda, \mu) = (\frac{1}{2}, 0)$  stetige Funktion lautet

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sqrt{x^2 + 8}, & \text{für } x < -1, \\ (x - \frac{1}{2}) \cdot x, & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \frac{1}{2} |x - 2|, & \text{für } 1 < x \end{cases}$$

42. Wir zeigen, daß die gegebene Funktion

$$f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{für } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

in allen Punkten  $a \in \mathbb{Q}$  stetig ist, mit Hilfe der folgenden Fallunterscheidung:

- Sei  $a < \sqrt{2}$ ; bei  $x \rightarrow a$  ist schließlich auch  $x < \sqrt{2}$  und damit

$$f(x) = 0 \xrightarrow{x \rightarrow a} 0 = f(a).$$

- Sei  $a > \sqrt{2}$ ; bei  $x \rightarrow a$  ist schließlich  $x > \sqrt{2}$  und damit

$$f(x) = 1 \xrightarrow{x \rightarrow a} 1 = f(a).$$

43. Wir betrachten eine Funktion  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  mit der Eigenschaft

$$(*) \quad f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \quad \text{für alle } x_1, x_2 \in \mathbb{R};$$

damit ist  $f$  eine additive Abbildung im Sinne der linearen Algebra.

- a) Für die spezielle Wahl von  $x_1 = 0$  und  $x_2 = 0$  ergibt sich

$$f(0) = f(0 + 0) \stackrel{(*)}{=} f(0) + f(0), \quad \text{also } f(0) = 0;$$

ferner wählen wir für  $x \in \mathbb{R}$  speziell  $x_1 = x$  und  $x_2 = -x$  und erhalten

$$0 = f(0) = f(x + (-x)) \stackrel{(*)}{=} f(x) + f(-x), \quad \text{also } f(-x) = -f(x).$$

- b) Sei  $r \in \mathbb{R}$  eine beliebige reelle Zahl; wir zeigen die Aussage

$$f(r \cdot n) = f(r) \cdot n \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „ $n = 0$ “ gilt

$$f(r \cdot 0) = f(0) \stackrel{\text{a)}}{=} 0 = f(r) \cdot 0.$$

- Für „ $n \rightarrow n + 1$ “ gilt

$$\begin{aligned} f(r \cdot (n + 1)) &= f(r \cdot n + r) \stackrel{(*)}{=} f(r \cdot n) + f(r) = \\ &\stackrel{\text{Induktions-}}{\text{voraussetzung}} f(r) \cdot n + f(r) = f(r) \cdot (n + 1). \end{aligned}$$

Damit ergibt sich ferner auch

$$f(r \cdot (-n)) = f(-(r \cdot n)) \stackrel{\text{a)}}{=} -f(r \cdot n) = -(f(r) \cdot n) = f(r) \cdot (-n)$$

für alle  $n \in \mathbb{N}_0$  und damit sogar

$$f(r \cdot z) = f(r) \cdot z \quad \text{für alle } r \in \mathbb{R} \quad \text{und} \quad z \in \mathbb{Z}.$$

- c) Jede rationale Zahl  $q \in \mathbb{Q}$  besitzt die Darstellung

$$q = \frac{z}{n} \quad \text{mit geeigneten } z \in \mathbb{Z} \quad \text{und} \quad n \in \mathbb{N};$$

wegen

$$f(z) = f(1 \cdot z) \stackrel{\text{b)}}{=} f(1) \cdot z \quad \text{und} \quad f(z) = f(q \cdot n) \stackrel{\text{b)}}{=} f(q) \cdot n$$

ergibt sich zusammen

$$f(q) \cdot n = f(1) \cdot z \quad \text{und damit} \quad f(q) = f(1) \cdot \frac{z}{n} = f(1) \cdot q.$$

- d) Sei nun  $f$  stetig im Punkt  $a = 0$ ; zum Nachweis, daß dann  $f$  schon eine stetige Funktion ist, zeigen wir die Stetigkeit von  $f$  in allen Punkten  $a' \in \mathbb{R}$ . Für alle Folgen  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a' \quad \text{gilt} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (x_n - a') = 0,$$

woraus mit der vorausgesetzten Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $a = 0$  schon

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n - a') = f(0) \stackrel{\text{a)}}{=} 0$$

folgt; damit ergibt sich aber

$$f(x_n) = f((x_n - a') + a') \stackrel{(*)}{=} \underbrace{f(x_n - a') + f(a')}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} f(a').$$

Für jedes  $x \in \mathbb{R}$  gibt es nun gemäß der Tutoriumsaufgabe 8 eine Folge  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$  rationaler Zahlen  $q_n \in \mathbb{Q}$  mit  $\lim_{n \rightarrow \infty} q_n = x$ ; mit der eben gezeigten Stetigkeit von  $f$  im Punkt  $x \in \mathbb{R}$  ergibt sich

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(q_n) \stackrel{\text{c)}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} (f(1) \cdot q_n) = f(1) \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} q_n = f(1) \cdot x.$$

Damit ist  $f$  sogar eine lineare Abbildung im Sinne der linearen Algebra; aus der Additivität von  $f$  folgt (mit der Stetigkeit) die Homogenität von  $f$ .

44. a) Die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = x^2 - 2,$$

ist als quadratische Funktion insbesondere stetig; damit ist aber auch ihre Einschränkung  $f$  auf die Definitionsmenge  $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$  und die Zielmenge  $\mathbb{Q}$  stetig. Ferner gilt

$$f(0) = 0^2 - 2 = -2 < 0 \quad \text{und} \quad f(2) = 2^2 - 2 = 2 > 0.$$

Wegen

$$f(x) = 0 \iff x^2 - 2 = 0 \iff x^2 = 2 \iff x = \pm\sqrt{2}$$

und der Irrationalität von  $\sqrt{2}$  besitzt  $f$  in  $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$  keine Nullstelle.

b) Der Nullstellensatz setzt eine stetige Funktion  $f$  auf einem reellen Intervall  $[a, b]$  voraus, da bei seinem Beweis auf die Vollständigkeit des Zahlenbereichs  $\mathbb{R}$  zurückgegriffen wird; die in a) betrachtete Funktion ist allerdings nur auf den rationalen Punkten des Intervalls  $[0, 2]$  definiert.