MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 9
16.12.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

33. a) Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{2^n}{n^{10}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ läßt sich sowohl mit dem Wurzelkriterium über

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^{10}}} = \frac{\sqrt[n]{2^n}}{\sqrt[n]{n^{10}}} = \frac{2}{\left(\sqrt[n]{n}\right)^{10}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

als auch mit dem Quotientenkriterium über

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{2^{n+1}\cdot n^{10}}{(n+1)^{10}\cdot 2^n} = \frac{2}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{10}} = \frac{2}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{10}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1^{10}} = 2 > 1$$

untersuchen; beide Kriterien liefern sofort deren Divergenz.
Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\left|\frac{3\,n^2+1}{n^4+1}\right| = \frac{3\,n^2+1}{n^4+1} \leq \frac{3\,n^2+1}{n^4} \leq \frac{4\,n^2}{n^4} = \frac{4}{n^2};$$

da mit der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ konvergiert, besitzt damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\,n^2+1}{n^4+1}$ in der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{n^2}$ eine konvergente Majorante und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

b) Sei $(a_n)_{n\geq 2}$ die Folge mit

$$a_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}-1)} > 0$$

für alle $n \geq 2$. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\sqrt{n}\,(\sqrt{n}-1)}{\sqrt{n+1}\left(\sqrt{n+1}-1\right)} = \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}-1}{\sqrt{n+1}-1}}_{\leq 1} \leq 1$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ monoton fallend. Ferner erhält man

$$a_n = \frac{1}{n-\sqrt{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{\sqrt{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{0}{1-0} = 0;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ eine Nullfolge. Folglich ist nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium die alternierende Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n = \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n-\sqrt{n}}$$

konvergent.

Des weiteren gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\frac{1}{\sqrt{n^2+44\,n+55}} \geq \frac{1}{\sqrt{n^2+44\,n^2+55\,n^2}} = \frac{1}{\sqrt{100\,n^2}} = \frac{1}{10\,n}.$$

Mit der harmonischen Reihe ist auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+44\,n+55}}$ die divergente Minorante $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10\,n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

34. Wir betrachten zunächst die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{3^{n^2}}{2^{n^3}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{3^{n^2}}{2^{n^3}}} = \frac{\sqrt[n]{3^{n^2}}}{\sqrt[n]{2^{n^3}}} = \frac{3^n}{2^{n^2}} = \Bigg(\underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\to 0}\Bigg)^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 < 1$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

Wir betrachten nun die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \dfrac{(-2)^n}{\sqrt{n^2+n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\begin{aligned}
\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| &= \left|\frac{(-2)^{n+1}}{\sqrt{(n+1)^2+(n+1)}} \cdot \frac{\sqrt{n^2+n}}{(-2)^n}\right| = \\
&= \left|(-2)\cdot\frac{\sqrt{n^2+n}}{\sqrt{n^2+3n+2}}\right| = 2\cdot\sqrt{\frac{n^2+n}{n^2+3n+2}} = \\
&= 2\cdot\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{2}{n^2}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2\cdot\sqrt{\frac{1+0}{1+0+0}} = 2 > 1
\end{aligned}$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium divergent.

35. Zum einen ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{n^n}{(1+n)^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{n^n}{(1+n)^n} = \frac{n^n}{\left(n\left(\frac{1}{n}+1\right)\right)^n} = \frac{n^n}{n^n\left(\frac{1}{n}+1\right)^n} = \frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$

ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, mithin ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent. Zum anderen ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = \frac{n^{(n^2)}}{(1+n)^{(n^2)}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{n^{(n^2)}}{(1+n)^{(n^2)}}\right|} = \frac{\sqrt[n]{n^{(n^2)}}}{\sqrt[n]{(1+n)^{(n^2)}}} = \frac{n^n}{(1+n)^n} = a_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1$$

ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nach dem Wurzelkriterium (absolut) konvergent.

36. a) Für die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nichtnegativer reeller Zahlen $a_n \geq 0$ bzw. positiver reeller Zahlen $b_n > 0$ wird

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0$$

vorausgesetzt; speziell zu $\varepsilon = 1 > 0$ existiert damit ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ dann

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{a_n}{b_n} - 0\right| < 1 \qquad \text{und damit} \qquad |a_n| \leq |b_n| \underset{b_n>0}{=} b_n$$

gilt. Wenn nun die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} b_n$ und stellt somit eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ dar; nach dem Majorantenkriterium ist damit die Reihe $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} a_n$ (sogar absolut) konvergent, und folglich konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

b) Wir betrachten die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1}{n} \geq 0 \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} \neq 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; wegen

$$\left|\frac{a_n}{b_n}\right| = \left|\frac{1}{n} \cdot \frac{\sqrt{n}}{(-1)^n}\right| = \frac{\sqrt{n}}{n} = \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 0.$$

Da nun $(\frac{1}{\sqrt{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge ist, konvergiert die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$$

nach dem Leibnizkriterium, während die harmonische Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

bekanntlich divergiert. Damit gilt die Aussage von a) nicht mehr, wenn man von der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ lediglich $b_n \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ fordert; es sei allerdings bemerkt, daß man bei der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf die Eigenschaft $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ verzichten kann.