Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

25. a) Wir zeigen zunächst

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$“: Es ist

$$\sum_{k=2}^{2} a_k = a_2 = \frac{8}{9} = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{2^2} + \frac{1}{(2+1)^2}\right)$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} a_k &= \left(\sum_{k=2}^{n} a_k\right) + a_{n+1} \\
&= \left(\frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)\right) + \frac{4\,(n+1)}{\left((n+1)^2-1\right)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{n^2} - \frac{1}{(n+1)^2} + \frac{4\,(n+1)}{\left(n^2+2\,n\right)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{1}{n^2} + \frac{4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(n+2)^2 - 4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{(n^2+4\,n+4) - (4\,n+4)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \frac{1}{(n+1)^2} - \frac{n^2}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{(n+1)^2} + \frac{1}{(n+2)^2}\right)
\end{aligned}$$

Wir zeigen jetzt

$$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$“: Es ist

$$\sum_{k=2}^{2} (-1)^k a_k = a_2 = \frac{8}{9}$$

und

$$\frac{3}{4} + (-1)^2 \cdot \frac{2 \cdot 2 + 1}{2^2 \cdot (2+1)^2} = \frac{3}{4} + \frac{5}{36} = \frac{32}{36} = \frac{8}{9}.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=2}^{n+1} (-1)^k a_k &= \left(\sum_{k=2}^{n} (-1)^k a_k \right) + (-1)^{n+1} a_{n+1} \\
&= \left(\frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} \right) + (-1)^{n+1} \frac{4\,(n+1)}{\left((n+1)^2 - 1\right)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} + (-1)^{n+1} \frac{4\,(n+1)}{n^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{-(2\,n+1)\,(n+2)^2 + 4\,(n+1)\,(n+1)^2}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{-(2\,n+1)\,(n^2+4\,n+4) + 4\,(n+1)^3}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \cdot \\
&\qquad \Big[- \big(2\,n^3 + 8\,n^2 + 8\,n + n^2 + 4\,n + 4\big) + \\
&\qquad\quad 4\,\big(n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1\big) \Big] \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{1}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \cdot \left[2\,n^3 + 3\,n^2\right] \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{n^2\,(2\,n+3)}{n^2\,(n+1)^2\,(n+2)^2} \\
&= \frac{3}{4} + (-1)^{n+1} \frac{2\,n+3}{(n+1)^2\,(n+2)^2}.
\end{aligned}$$

b) Wegen

$$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \Bigg(\underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\to 0} \Bigg) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{5}{4}$$

ist die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n = \frac{5}{4}$.
Ferner ist wegen

$$\left| (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} \right| = \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} = \Bigg(\underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{1}{n^2}}_{\to 0} \Bigg) \cdot \underbrace{\frac{1}{(n+1)^2}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

damit

$$\sum_{k=2}^{n}(-1)^k a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{4}$$

die Reihe $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\, a_n = \frac{3}{4}.$$

26. a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Wegen $(-1)^n\, x^{2n} = (-x^2)^n$ für alle $x \in \mathbb{N}_0$ handelt es sich bei der Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ um die geometrische Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = -x^2$; diese konvergiert aber genau für $|q| < 1$. Wegen

$$|q| < 1 \iff |-x^2| < 1 \iff |x|^2 < 1 \iff |x| < 1$$

konvergiert also die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$ genau für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n} = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(-x^2)} = \frac{1}{1+x^2}.$$

27. Für $n \in \mathbb{N}$ betrachten wir die n–te Partialsumme

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k.$$

Für jedes $x \in \mathbb{R}$ ist damit $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Partialsummen

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k = \sum_{k=0}^{n} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2},$$

also die geometrische Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} q^k \qquad \text{für} \qquad q = \frac{3x}{x^2+2};$$

diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ ist, wegen

$$\begin{aligned} |q| < 1 \iff \left|\frac{3x}{x^2+2}\right| < 1 \iff \frac{3|x|}{x^2+2} < 1 \underset{x^2+2>0}{\iff} \\ \iff 3|x| < x^2+2 \iff 0 < |x|^2 - 3|x| + 2 \iff \\ \iff 0 < (|x|-1)\,(|x|-2) \iff \big(|x| < 1 \;\text{ oder }\; |x| > 2\big) \end{aligned}$$

also genau für

$$x \in\,]-\infty, -2[\, \cup\,]-1, 1[\, \cup\,]2, \infty[\,,$$

und in diesem Fall gilt gemäß der Summenformel für geometrische Reihen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-\frac{3x}{x^2+2}} = \frac{x^2+2}{x^2-3x+2}.$$

28. Zu betrachten ist die durch $f_1 = f_2 = 1$ und

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$

rekursiv definierte Fibonacci–Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Wir zeigen die Ungleichung

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 1$" ist

$$f_1 = 1 \geq \frac{2}{3} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^1,$$

und für „$n = 2$" ist sogar

$$f_2 = 1 = \frac{4}{9}\cdot\frac{9}{4} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2, \quad \text{insbesondere also} \quad f_2 \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

- Für „$n \to n+1$" für $n \geq 2$ ergibt sich

$$\begin{aligned} f_{n+1} = f_n + f_{n-1} &\geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n + \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} = \\ &= \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\underbrace{\left(\frac{3}{2}+1\right)}_{=\frac{5}{2}=\frac{10}{4}\geq\frac{9}{4}} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\cdot\underbrace{\frac{9}{4}}_{=(\frac{3}{2})^2} = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 4$ gilt

$$\begin{aligned} a_n = \prod_{k=1}^{n}\frac{f_k}{f_{k+1}} &= \underbrace{\frac{f_1}{f_2}}_{\text{für } k=1}\cdot\underbrace{\frac{f_2}{f_3}}_{\text{für } k=2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{f_{n-1}}{f_n}}_{\text{für } k=n-1}\cdot\underbrace{\frac{f_n}{f_{n+1}}}_{\text{für } k=n} = \\ &= \frac{f_1\cdot(f_2\cdot\ldots\cdot f_{n-1}\cdot f_n)}{(f_2\cdot\ldots\cdot f_{n-1}\cdot f_n)\cdot f_{n+1}} = \frac{f_1}{f_{n+1}} = \frac{1}{f_{n+1}}, \end{aligned}$$

und gemäß a) gilt

$$f_{n+1} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1} > 0 \quad \text{und damit} \quad 0 < a_n = \frac{1}{f_{n+1}} \leq \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1};$$

wegen $\left|\frac{2}{3}\right| = \frac{2}{3} < 1$ gilt

$$\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^{n+1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Schrankenlemma eine Nullfolge ist.

c) Die zu betrachtende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{f_n}$ besitzt die nichtnegativen Glieder $\dfrac{1}{f_n}$ mit

$$f_n \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^n > 0 \quad \text{und damit} \quad 0 < \frac{1}{f_n} \leq \frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^n;$$

sie ist als Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Partialsummen wegen

$$s_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{f_k} \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{9}{4}\left(\frac{2}{3}\right)^k \leq \frac{9}{4}\cdot\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k \underset{\left|\frac{2}{3}\right|<1}{=} \frac{9}{4}\cdot\frac{1}{1-\frac{2}{3}} = \frac{27}{4}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt und damit konvergent.