

Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

21. Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{n + (-1)^n \cdot (3n + 1)}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} \frac{-4k + 1}{2k - 1} = \frac{-4 + \frac{1}{k}}{2 - \frac{1}{k}}, & \text{falls } n = 2k - 1 \text{ ungerade,} \\ \frac{8k + 1}{2k} = \frac{8 + \frac{1}{k}}{2}, & \text{falls } n = 2k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = -2$ und $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = 4$, so daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Häufungspunkte $b_1 = -2$ und $b_2 = 4$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right) = \begin{cases} \cos\left(\frac{8k\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi) = 1, & \text{falls } n = 8k, \\ \cos\left(\frac{(8k-1)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8k - 1, \\ \cos\left(\frac{(8k-2)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8k - 2, \\ \cos\left(\frac{(8k-3)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{3\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8k - 3, \\ \cos\left(\frac{(8k-4)\pi}{4}\right) = \cos(2k\pi - \pi) = -1, & \text{falls } n = 8k - 4, \\ \cos\left(\frac{(8k-5)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{5\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8k - 5, \\ \cos\left(\frac{(8k-6)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{3\pi}{2}\right) = 0, & \text{falls } n = 8k - 6, \\ \cos\left(\frac{(8k-7)\pi}{4}\right) = \cos\left(2k\pi - \frac{7\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}, & \text{falls } n = 8k - 7. \end{cases}$$

Die Folge $(\cos\left(\frac{n\pi}{4}\right))_{n \in \mathbb{N}}$ besitzt die Häufungspunkte $-1, 0$ und 1 für die geraden $n \in \mathbb{N}$ bzw. $-\frac{\sqrt{2}}{2}$ und $\frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n \in \mathbb{N}$; damit besitzt die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ die Häufungspunkte $0, 1$ und 2 für die geraden $n \in \mathbb{N}$ bzw. $-1 - \frac{\sqrt{2}}{2}$ und $-1 + \frac{\sqrt{2}}{2}$ für die ungeraden $n \in \mathbb{N}$, insgesamt also die Häufungspunkte

$$c_1 = 0, \quad c_2 = 1, \quad c_3 = 2, \quad c_4 = -1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \text{und} \quad c_5 = -1 + \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(b_{8k})_{k \in \mathbb{N}}, \dots, (b_{8k-7})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ erfaßt werden, gibt es somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

22. Für die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ reeller Zahlen gebe es eine Konstante $q \in [0, 1[$ mit der Eigenschaft $|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Wir zeigen $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ durch vollständige Induktion:

- Für „ $n = 0$ “ ist $|a_{0+1} - a_0| = |a_1 - a_0| \leq q^0 \cdot |a_1 - a_0|$.
- Für „ $n \rightarrow n + 1$ “ folgt aus $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$ schon

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| \leq q \cdot |a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot (q^n \cdot |a_1 - a_0|) = q^{n+1} \cdot |a_1 - a_0|.$$

b) Wir zeigen $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q}$ für alle $k \in \mathbb{N}_0$. Es ist

$$\begin{aligned} |a_{n+k} - a_n| &= |(a_{n+k} - a_{n+k-1}) + (a_{n+k-1} - a_{n+k-2}) + \dots + (a_{n+1} - a_n)| \\ &\stackrel{(*)}{\leq} |a_{n+k} - a_{n+k-1}| + |a_{n+k-1} - a_{n+k-2}| + \dots + |a_{n+1} - a_n| \\ &= \sum_{\ell=0}^{k-1} |a_{n+\ell+1} - a_{n+\ell}| \stackrel{(**)}{\leq} \sum_{\ell=0}^{k-1} q^{n+\ell} \cdot |a_1 - a_0| \\ &\leq q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \sum_{\ell=0}^{k-1} q^\ell \stackrel{(***)}{=} q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1 - q^k}{1 - q} \\ &\leq q^n \cdot |a_1 - a_0| \cdot \frac{1}{1 - q} = q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q}. \end{aligned}$$

Dabei geht bei (*) die Dreiecksungleichung, bei (**) Teilaufgabe a) und bei (***) die geometrische Summenformel ein.

c) Wegen $0 \leq q < 1$ gilt

$$q^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und damit} \quad q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

folglich gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q} < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$, und für alle $m, n \geq n_0$ mit $m = n + k$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$ ergibt sich

$$|a_m - a_n| = |a_{n+k} - a_n| \stackrel{\text{b)}}{\leq} q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q} < \varepsilon,$$

so daß $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ eine Cauchyfolge ist.

23. a) Für „ \implies “ sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es bezeichne $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ ihren Grenzwert; damit ist jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, insbesondere also $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$, konvergent ebenfalls gegen den Grenzwert a . Für „ \impliedby “ seien die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und es bezeichne a ihren gemeinsamen Grenzwert. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es

- wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = a$ ein $k_1 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{2k-1} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_1$,

- wegen $\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = a$ ein $k_2 \in \mathbb{N}$ mit $|a_{2k} - a| < \varepsilon$ für alle $k \geq k_2$,

und wir setzen $n_0 = \max\{2k_1 - 1, 2k_2\}$; für alle $n \geq n_0$ gilt nun

- im Falle, daß $n = 2k - 1$ ungerade ist, zum einen

$$|a_n - a| = |a_{2k-1} - a| < \varepsilon, \quad \text{da } k \geq k_1,$$

- im Falle, daß $n = 2k$ gerade ist, zum anderen

$$|a_n - a| = |a_{2k} - a| < \varepsilon, \quad \text{da } k \geq k_2,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert a konvergiert.

b) Für „ \implies “ sei die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent; damit ist jede Teilfolge $(a_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, insbesondere also $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ ebenfalls konvergent.

Für „ \impliedby “ seien die Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$, $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ und $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergent, und ihre Grenzwerte seien mit

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1}, \quad b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} \quad \text{und} \quad c = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k}$$

bezeichnet. Die Teilfolge $(a_{6\ell-3})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist

- sowohl die Teilfolge von $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 3\ell - 1$
- als auch die Teilfolge von $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 2\ell - 1$,

und damit ergibt sich

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{6\ell-3} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = c;$$

die Teilfolge $(a_{6\ell})_{\ell \in \mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist

- sowohl die Teilfolge von $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 3\ell$
- als auch die Teilfolge von $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$ zur Indexfolge $(k_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$ mit $k_\ell = 2\ell$,

und damit ergibt sich

$$b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{\ell \rightarrow \infty} a_{6\ell} = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{3k} = c.$$

Folglich gilt $a = b$, und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gemäß a) konvergent.

24. Für die gegebene durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 2, \quad a_3 = \frac{3}{2}, \quad a_4 = \frac{5}{3}, \quad a_5 = \frac{8}{5}, \quad a_6 = \frac{13}{8}, \dots$$

Sie besitzt daher die Teilfolgen

$$(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}} = (a_1, a_3, a_5, \dots) = \left(1, \frac{3}{2}, \frac{8}{5}, \dots\right)$$

und

$$(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}} = (a_2, a_4, a_6, \dots) = \left(2, \frac{5}{3}, \frac{13}{8}, \dots\right)$$

Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $n = 1$ “: Es ist $a_1 = 1$ und damit $1 \leq a_1 \leq 2$.

„ $n \rightarrow n + 1$ “: Es ist $1 \leq a_n \leq 2$ und damit

$$1 \geq \frac{1}{a_n} \geq \frac{1}{2} \implies 2 \geq 1 + \frac{1}{a_n} \geq \frac{3}{2} \implies 2 \geq a_{n+1} \geq 1.$$

a) Wir zeigen $a_{2k-1} \leq a_{2k+1}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„ $k = 1$ “: Es ist

$$a_1 = 1 \leq \frac{3}{2} = a_3.$$

„ $k \rightarrow k + 1$ “: Es ist

$$\begin{aligned} a_{2k-1} \leq a_{2k+1} &\stackrel{a_{2k-1} > 0}{\implies} \frac{1}{a_{2k-1}} \geq \frac{1}{a_{2k+1}} \implies \\ &\underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}}_{=a_{2k}} \geq \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+1}}}_{=a_{2k+2}} \implies a_{2k} \geq a_{2k+2} \stackrel{a_{2k+2} > 0}{\implies} \frac{1}{a_{2k}} \leq \frac{1}{a_{2k+2}} \\ &\implies \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k}}}_{=a_{2k+1}} \leq \underbrace{1 + \frac{1}{a_{2k+2}}}_{=a_{2k+3}} \implies a_{2k+1} \leq a_{2k+3} \end{aligned}$$

Damit ist die zunächst Teilfolge $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend. Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt also $a_{2k-1} \leq a_{2k+1}$, woraus sich

$$\frac{1}{a_{2k-1}} \geq \frac{1}{a_{2k+1}} \quad \text{und damit} \quad a_{2k} = 1 + \frac{1}{a_{2k-1}} \geq 1 + \frac{1}{a_{2k+1}} = a_{2k+2}$$

ergibt; folglich ist dann die Teilfolge $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend.

b) Die Teilfolge $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ ist gemäß a) monoton wachsend und gemäß den einleitenden Bemerkungen (durch 1 nach unten und 2 nach oben) beschränkt, also konvergent, und besitzt daher einen Grenzwert $a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k-1}$, für den ebenfalls $1 \leq a \leq 2$ gilt. Wegen

$$a_{2k+1} = 1 + \frac{1}{a_{2k}} = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{a_{2k-1}}} = 1 + \frac{a_{2k-1}}{a_{2k-1} + 1} = \frac{2a_{2k-1} + 1}{a_{2k-1} + 1}$$

für alle $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{2a_{2k-1} + 1}{a_{2k-1} + 1} = \frac{2a + 1}{a + 1}$$

und damit

$$a(a + 1) = 2a + 1, \quad \text{also} \quad a^2 - a - 1 = 0,$$

woraus sich

$$a = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot (-1)}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

wegen $1 \leq a \leq 2$ also

$$a = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$$

ergibt. Des Weiteren ist die Teilfolge gemäß a) $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$ monoton fallend und beschränkt, also konvergent, und mit denselben Überlegungen wie eben ergibt sich für den Grenzwert $b = \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k}$ dann

$$b = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}.$$

Damit konvergiert aber (unter Berücksichtigung von Aufgabe 19) auch die gesamte Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen den Grenzwert $a = b$.