MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

17. Im Falle der Konvergenz der durch die Rekursionsvorschrift

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) \qquad \text{für} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ kommen für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ wegen

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) = \frac{1}{5}\left(a^2 + 6\right)$$

und damit

$$0 = a^2 - 5\,a + 6 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-2)(a-3)$$

nur die beiden Werte $a = 2$ und $a = 3$ in Frage. Dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [0,3]$:

- Für $a_0 = 2$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(2^2+6\right) = \frac{1}{5}\cdot 10 = 2$ und analog $a_n = 2$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 2$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{5}\left(3^2+6\right) = \frac{1}{5}\cdot 15 = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $a = 3$.
- Für $a_0 \in\,]2,3[$ zeigen wir zunächst $a_n \in\,]2,3[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$“ ist dies klar, und für „$n \to n+1$“ gilt

$$a_n \in\,]2,3[\implies 2 < a_n < 3 \implies 4 < a_n^2 < 9 \implies 10 < a_n^2 + 6 < 15 \implies$$
$$\implies 2 < \frac{1}{5}\left(a_n^2+6\right) < 3 \implies 2 < a_{n+1} < 3 \implies a_{n+1} \in\,]2,3[\,.$$

  Damit ergibt sich aber

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2+6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n-3)}_{<0}\underbrace{(a_n-2)}_{>0} < 0$$

  und somit $a_{n+1} < a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton fallend und (etwa durch 2) nach unten beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

- Für $a_0 \in [0,2[$ zeigen wir zunächst $a_n \in [0,2[$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion: für „$n = 0$" ist dies klar, und für „$n \to n+1$" gilt

$$a_n \in [0,2[\implies 0 \le a_n < 2 \implies 0 \le a_n^2 < 4 \implies 6 \le a_n^2 + 6 < 10 \implies$$
$$\implies \frac{6}{5} \le \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) < 2 \implies 0 \le a_{n+1} < 2 \implies a_{n+1} \in [0,2[\,.$$

Damit ergibt sich aber

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) - a_n = \frac{1}{5}\left(a_n^2 - 5\,a_n + 6\right) = \frac{1}{5}\underbrace{(a_n - 3)}_{<0}\underbrace{(a_n - 2)}_{<0} > 0$$

und somit $a_{n+1} > a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ streng monoton wachsend und (etwa durch 2) nach oben beschränkt, also konvergent; als Grenzwert kommt nur $a = 2$ in Frage.

18. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ zu betrachten.

a) Sei $a_0 \in \mathbb{R}$ ein beliebiger Startwert. Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt

$$a_{n+1} - a_n = \left(a_n^2 - a_n + 1\right) - a_n = a_n^2 - 2\,a_n + 1 = (a_n - 1)^2 \ge 0,$$

also $a_{n+1} \ge a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend. Gemäß dem Hauptsatz über monotone Folgen gibt es nun hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nur die beiden Alternativen:

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt, so ist sie konvergent. Für ihren in diesem Fall existierenden Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ erhält man mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty}\left(a_n^2 - a_n + 1\right) = a^2 - a + 1,$$

folglich

$$0 = \left(a^2 - a + 1\right) - a = a^2 - 2\,a + 1 = (a-1)^2,$$

also $a - 1 = 0$ und damit zwingend $a = 1$.

- Ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, so ist sie bestimmt divergent gegen $+\infty$.

b) Für einen Startwert $a_0 \in [0,1]$ zeigen wir $a_n \in [0,1]$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 0$" gilt $a_0 \in [0,1]$ gemäß der Wahl des Startwerts.
- Für „$n \to n+1$" gilt gemäß der Induktionsvoraussetzung $a_n \in [0,1]$, also $0 \le a_n \le 1$, woraus $a_n^2 \le a_n$ und damit

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \le a_n - a_n + 1 = 1$$

folgt; mit der in a) gezeigten Monotonie gilt ferner $a_{n+1} \ge a_n \ge 0$.

Damit ist die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ auch (nach oben) beschränkt, mithin konvergent, und gemäß a) besitzt sie den Grenzwert $a = 1$.

c) Für einen Startwert $a_0 \notin [0,1]$ gilt $a_0 < 0$ oder $a_0 > 1$, insbesondere also $a_0^2 > a_0$, woraus

$$a_1 = a_0^2 - a_0 + 1 > a_0 - a_0 + 1 = 1$$

folgt. Unter der Annahme, die gemäß a) monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ ist nach oben beschränkt, erhält man ihre Konvergenz, und für ihren Grenzwert a ergibt sich in

$$a \underset{\text{Monotonie}}{\geq} a_1 > 1 \underset{\text{gemäß a)}}{=} a$$

ein Widerspruch. Folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nicht nach oben beschränkt, mithin bestimmt divergent gegen $+\infty$.

19. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right) = n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{2z}{n} + \frac{z^2}{n^2}\right)\right) =$$
$$= n \cdot \left(-\frac{2z}{n} - \frac{z^2}{n^2}\right) = -2z - \frac{z^2}{n};$$

damit ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2\right) = \lim_{n\to\infty} \left(-2z - \frac{z^2}{n}\right) = -2z.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 = \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2;$$

mit Hilfe des Grenzwertes

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n = e^z$$

ergibt sich damit

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2} = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 =$$
$$= \left[\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^n\right]^2 \cdot \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 = e^{2z} \cdot 1^2 = e^{2z}.$$

c) Für $z = 0$ ergibt sich

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{0}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} 1 = \frac{1}{n} \cdot n = 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Für $z \neq 0$ gilt $q = \left(1 + \dfrac{z}{n}\right)^2 \neq 1$ für alle $n \geq |z| > 0$, und mit der geometrischen Summenformel ergibt sich

$$\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} q^k = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \sum_{k=0}^{n-1} q^k = \frac{1}{n} \cdot q \cdot \frac{1-q^n}{1-q} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2 \cdot \frac{1 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n}}{1 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^2} = \frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^2\right)}.$$

Nach a) gilt für den Nenner

$$\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right) = -2z,$$

und nach b) ist im Zähler

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2\,n+2} = e^{2z};$$

damit erhält man

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+\frac{z}{n}\right)^2 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^{2n+2}}{n \cdot \left(1 - \left(1+\frac{z}{n}\right)^2\right)} = \frac{1-e^{2z}}{-2z} = \frac{e^{2z}-1}{2z}.$$

20. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Wir zeigen zunächst, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist:

- Wir zeigen $0 < a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
  - „$n = 1$“: Es ist $0 < a_1 < b_1$ nach Voraussetzung und damit $0 < a_1 \leq b_1$.
  - „$n \to n+1$“: Wegen $0 < a_n \leq b_n$ gilt $0 < a_{n+1}$ und $0 < b_{n+1}$ sowie

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} - 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} =$$

$$= \frac{(a_n + b_n)^2 - 4 \cdot a_n \cdot b_n}{2 \cdot (a_n + b_n)} = \frac{(a_n - b_n)^2}{2 \cdot (a_n + b_n)} \geq 0,$$

  also $b_{n+1} - a_{n+1} \geq 0$ bzw. $b_{n+1} \geq a_{n+1}$, insgesamt also $0 < a_{n+1} \leq b_{n+1}$.

- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \geq 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{b_n + b_n} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{2 \cdot b_n} = a_n,$$

  also $a_{n+1} \geq a_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der unteren Intervallgrenzen monoton wachsend.

- Wegen $0 < a_n \leq b_n$ erhalten wir

  $$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = \frac{2 \cdot b_n}{2} = b_n,$$

  also $b_{n+1} \leq b_n$, für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der oberen Intervallgrenzen monoton fallend.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und wegen $a_n \leq b_n \leq b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach oben beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$. Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton fallend und wegen $b_n \geq a_n \geq a_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ nach unten beschränkt, also konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Damit gilt aber auch $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_{n+1} = b$, und wir erhalten mit Hilfe der Rekursionsvorschrift von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann

  $$b = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{a+b}{2},$$

  also $2\,b = a + b$ und damit $b = a$; folglich ist wegen

  $$\lim_{n\to\infty} (b_n - a_n) = b - a = 0$$

  die Folge $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Intervallängen eine Nullfolge.

Wir bestimmen nun das durch die Intervallschachtelung $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definierte Element $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$; dabei gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a = r = b = \lim_{n\to\infty} b_n,$$

wegen $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ insbesondere $r \geq 0$. Wir zeigen dazu $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion: für „$n = 1$“ ist $a_1 \cdot b_1 = a_1 \cdot b_1$, und für „$n \to n + 1$“ folgt aus $a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1$ schon

$$a_{n+1} \cdot b_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \cdot \frac{a_n + b_n}{2} = a_n \cdot b_n = a_1 \cdot b_1.$$

Damit ergibt sich

$$r^2 = \lim_{n\to\infty} a_n \cdot \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} (a_n \cdot b_n) = a_1 \cdot b_1,$$

wegen $r \geq 0$ also $r = \sqrt{a_1 \cdot b_1}$; es ist also $\sqrt{a_1 \cdot b_1} \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.