Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

13. Zu betrachten ist die durch

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$.

a) Es ist

$$a_0 = 1, \quad a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \quad a_2 = \frac{a_1}{2} + 1 = \frac{7}{4}, \quad a_3 = \frac{a_2}{2} + 1 = \frac{15}{8}, \ldots,$$

also

$$a_0 = 2 - 1, \quad a_1 = 2 - \frac{1}{2}, \quad a_2 = 2 - \frac{1}{4}, \quad a_3 = 2 - \frac{1}{8}, \ldots,$$

wodurch die Vermutung

$$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n \qquad \text{für alle} \qquad n \in \mathbb{N}_0$$

nahegelegt wird; wir weisen diese mit Hilfe vollständiger Induktion nach:

- Für „$n = 0$“ ist
$$a_0 = 1 = 2 - 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^0.$$
- Für „$n \to n + 1$“ folgt aus der Induktionsvoraussetzung
$$a_n = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$
unter Verwendung der Rekursionsvorschrift die Induktionsbehauptung
$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \frac{a_n}{2} + 1 = \frac{1}{2} \cdot \left(2 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1 \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) + 1 = 2 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}. \end{aligned}$$

Wegen $\left|\frac{1}{2}\right| = \frac{1}{2} < 1$ ergibt sich

$$a_n = 2 - \underbrace{\left(\frac{1}{2}\right)^n}_{\to 0} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 2 + 0 = 2;$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergent gegen den Grenzwert $a = 2$.

b) Wir zeigen jeweils mit vollständiger Induktion:

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq a_{n+1}$: für „$n = 0$" ist

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_1 = \frac{a_0}{2} + 1 = \frac{3}{2}, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq a_1,$$

und für „$n \to n+1$" folgt aus $a_n \leq a_{n+1}$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot a_{n+1} = \frac{a_{n+1}}{2}$$

und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq \frac{a_{n+1}}{2} + 1 = a_{n+2}.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

- Für alle $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $a_n \leq 42$: für „$n = 0$" ist

$$a_0 = 1, \qquad \text{also} \qquad a_0 \leq 42,$$

und für „$n \to n+1$" folgt aus $a_n \leq 42$ zunächst mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation

$$\frac{a_n}{2} = \frac{1}{2} \cdot a_n \underset{\text{wegen } \frac{1}{2}>0}{\leq} \frac{1}{2} \cdot 42 = 21$$

und dann mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \leq 21 + 1 = 22, \qquad \text{insbesondere also} \qquad a_{n+1} \leq 42.$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ nach oben beschränkt.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ insgesamt monoton wachsend und (nach oben) beschränkt, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mithin konvergent. Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ergibt sich mit Hilfe der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_n}{2} + 1\right) = \frac{a}{2} + 1,$$

also

$$\frac{a}{2} = 1 \qquad \text{und damit} \qquad a = 2.$$

14. a) Wir zeigen $1 \le a_n \le 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$":

$$\text{Es ist } a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und damit} \quad 1 \le a_1 \le 5.$$

„$n \to n+1$":

$$\begin{aligned} 1 \le a_n \le 5 \implies & \\ & 9 \ge 11 - 2\,a_n \ge 1 \implies 3 \ge \sqrt{11 - 2\,a_n} \ge 1 \implies \\ & \qquad 2 \le 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \le 4 \implies 1 \le a_{n+1} \le 5. \end{aligned}$$

b) Wir zeigen $a_n \ge a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 1$":

$$a_1 = \frac{7}{2} \ge 3 = 5 - \sqrt{11 - 2 \cdot \frac{7}{2}} = a_2.$$

„$n \to n+1$":

$$\begin{aligned} a_n \ge a_{n+1} \implies & \\ & 11 - 2\,a_n \le 11 - 2\,a_{n+1} \implies \sqrt{11 - 2\,a_n} \le \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} \implies \\ & \qquad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \ge 5 - \sqrt{11 - 2\,a_{n+1}} = a_{n+2}. \end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $1 \le a \le 5$ gemäß a), und wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel erhält man

$$\begin{aligned} a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(5 - \sqrt{11 - 2\,a_n}\right) = & \\ & = 5 - \sqrt{11 - 2 \lim_{n\to\infty} a_n} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a}. \end{aligned}$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} a - 5 = -\sqrt{11 - 2\,a} \implies (a-5)^2 = \left(-\sqrt{11 - 2\,a}\right)^2 \implies & \\ a^2 - 10\,a + 25 = 11 - 2\,a \implies a^2 - 8\,a + 14 = 0 \implies & \\ a = \frac{-(-8) \pm \sqrt{(-8)^2 - 4 \cdot 14}}{2} = \frac{8 \pm \sqrt{8}}{2} = 4 \pm \sqrt{2}; & \end{aligned}$$

wegen $1 \le a \le 5$ folgt hieraus schon

$$a = 4 - \sqrt{2}.$$

15. a) Wir zeigen $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 1$":

$$a_1 = 1 > \frac{1}{2}.$$

„$n \to n+1$“: Wegen $a_n > \frac{1}{2}$ ist $a_n - \frac{1}{2} > 0$ sowie $a_n > 0$ und $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - \frac{1}{2} = \frac{1+a_n^2}{2+a_n} - \frac{1}{2} = \frac{2\,(1+a_n^2) - (2+a_n)}{2\,(2+a_n)} = \frac{2 + 2\,a_n^2 - 2 - a_n}{2\,(2+a_n)} =$$
$$= \frac{2\,a_n^2 - a_n}{2\,(2+a_n)} = \frac{2\,a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2\,(2+a_n)} = \frac{a_n(a_n - \frac{1}{2})}{2+a_n} > 0$$

und damit $a_{n+1} > \frac{1}{2}$ ergibt.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > \frac{1}{2}$ gemäß a) und damit $2\,a_n > 1$, also $1 - 2\,a_n < 0$, sowie $2 + a_n > 0$, woraus sich

$$a_{n+1} - a_n = \frac{1+a_n^2}{2+a_n} - a_n = \frac{(1+a_n^2) - a_n\,(2+a_n)}{2+a_n} =$$
$$= \frac{1 + a_n^2 - 2\,a_n - a_n^2}{2+a_n} = \frac{1 - 2\,a_n}{2+a_n} < 0$$

und damit $a_{n+1} < a_n$ ergibt; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Da sie zudem gemäß a) nach unten (durch $\frac{1}{2}$) beschränkt ist, ergibt sich daraus schon ihre Konvergenz. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1+a_n^2}{2+a_n} = \frac{1+a^2}{2+a},$$

woraus sich

$$a\,(2+a) = 1 + a^2, \qquad \text{also} \qquad 2\,a + a^2 = 1 + a^2,$$

und damit

$$2\,a = 1, \qquad \text{also} \qquad a = \frac{1}{2}$$

ergibt.

16. a) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$; damit konvergiert auch die (lediglich um einen Index verschobene) Folge $(a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = a$. Folglich ist zunächst $(a_n + a_{n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ als Summe konvergenter Folgen konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \lim_{n\to\infty} a_n + \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = a + a = 2\,a$$

und schließlich $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1})$ für alle $n \in \mathbb{N}$ als Vielfaches einer konvergenten Folge konvergent mit

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot \lim_{n\to\infty} (a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2} \cdot (2\,a) = a.$$

Alternativ läßt sich auch direkt mit Hilfe der Definition argumentieren: da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$; damit folgt

$$\begin{aligned}|b_n - a| &= \left|\frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) - a\right| = \frac{1}{2}\cdot|(a_n + a_{n+1}) - 2\,a| = \\ &= \frac{1}{2}\cdot|(a_n - a) + (a_{n+1} - a)| \leq \frac{1}{2}\cdot\big(\underbrace{|a_n - a|}_{<\varepsilon} + \underbrace{|a_{n+1} - a|}_{<\varepsilon}\big) < \varepsilon\end{aligned}$$

für alle $n \geq n_0$, und damit konvergiert die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a \in \mathbb{R}$.

b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach Beispiele 1.10 3) nicht konvergent. Die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist jedoch wegen

$$b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) = \frac{1}{2}\,\big((-1)^n + (-1)^{n+1}\big) = \frac{(-1)^n}{2}\,(1 + (-1)) = 0$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ die konstante Nullfolge und damit insbesondere konvergent.

c) Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Voraussetzung konvergent, insbesondere (nach oben) beschränkt, es gibt also ein $M \in \mathbb{R}$ mit $b_n \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung monoton wachsend ist, gilt $a_n \leq a_{n+1}$ und folglich

$$M \geq b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \geq \frac{1}{2}\,(a_n + a_n) = a_n$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; damit ist auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, demnach als monoton wachsende Folge bereits konvergent.