Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

9. a) Für $k = 5$ ergibt sich

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{(1+n)^5 - (n^5 + 5\,n^4)}{(n+3)^3} \\ &= \frac{(1 + 5\,n + 10\,n^2 + 10\,n^3 + 5\,n^4 + n^5) - (n^5 + 5\,n^4)}{(n+3)^3} \\ &= \frac{1 + 5\,n + 10\,n^2 + 10\,n^3}{n^3 + 9\,n^2 + 27\,n + 27} = \frac{n^3\left(\frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^2} + \frac{10}{n} + 10\right)}{n^3\left(1 + \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^3}\right)} \\ &= \frac{\frac{1}{n^3} + \frac{5}{n^2} + \frac{10}{n} + 10}{1 + \frac{9}{n} + \frac{27}{n^2} + \frac{27}{n^3}} \quad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \quad \frac{0+0+0+10}{1+0+0+0} = 10; \end{aligned}$$

dabei verwenden wir

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^3} = 0.$$

b) Sei nun $k \neq 5$. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist das Folgenglied

$$a_n = \frac{(1+n)^k - \left(n^k + k\,n^{k-1}\right)}{(n+3)^3}$$

ein gebrochenrationaler Term in n; dabei ist der Zähler gemäß dem binomischen Lehrsatz

$$(1+n)^k - \left(n^k + k\,n^{k-1}\right) = \left(\sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} 1^{k-j}\, n^j\right) - \left(n^k + k\,n^{k-1}\right) =$$

$$= \left(\sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} n^j + \underbrace{k\,n^{k-1}}_{\text{für } j=k-1} + \underbrace{n^k}_{\text{für } j=k}\right) - \left(n^k + k\,n^{k-1}\right) = \sum_{j=0}^{k-2} \binom{k}{j} n^j,$$

ein Polynom vom Grad $k-2$, während der Nenner gemäß a) ein Polynom vom Grad 3 ist. Folglich erhält man

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } k-2 < 3, \text{ also } k < 5, \\ +\infty, & \text{falls } k-2 > 3, \text{ also } k > 5. \end{cases}$$

10. Hinsichtlich der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|x| < 1$ ist

  $$\lim_{n\to\infty} x^n = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{1-0}{1+0} = 1.$$

- Für $|x| > 1$ können wir

  $$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} = \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

  $$\lim_{n\to\infty} x^n = \infty \qquad \text{ist} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{x^n} = 0$$

  und damit

  $$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{x^n}-1}{\frac{1}{x^n}+1} = \frac{0-1}{0+1} = -1.$$

- Für $|x| = 1$ ist wegen $x \neq -1$ nur $x = 1$ zu betrachten; wegen $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann eine Nullfolge.

Hinsichtlich der Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ treffen wir die folgende Fallunterscheidung:

- Für $|y| < 1$ ist

  $$\lim_{n\to\infty} y^n = 0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty} y^{2n} = \lim_{n\to\infty} (y^n)^2 = 0^2 = 0;$$

  folglich ergibt sich

  $$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{0}{1+0} = 0.$$

- Für $|y| > 1$ ist $y \neq 0$, und wir können

  $$b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}} = \frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}}+1}$$

  für alle $n \in \mathbb{N}$ schreiben; wegen

  $$\lim_{n\to\infty} |y^n| = \lim_{n\to\infty} |y|^n = \infty$$

ist

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{y^n}=0 \qquad \text{und damit} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{y^{2n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{y^n}\right)^2=0^2=0,$$

woraus sich

$$\lim_{n\to\infty} b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{y^n}}{\frac{1}{y^{2n}}+1}=\frac{0}{0+1}=0$$

ergibt.

- Für $|y|=1$ ist $y=1$ oder $y=-1$:
  - Für $y=1$ ist $b_n=\frac{1}{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konstante Folge mit Grenzwert $\frac{1}{2}$.
  - Für $y=-1$ ist $b_n=(-1)^n\frac{1}{2}$ für alle $n\in\mathbb{N}$; damit ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die alternierende Folge $\left(-\frac{1}{2},\frac{1}{2},-\frac{1}{2},\frac{1}{2},\ldots\right)$, die jedoch divergiert.

11. a) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}=\frac{\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}\right)\left(\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}\right)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2}^{\,2}-\sqrt{n^2+1}^{\,2}}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=\frac{n^2-(n^2+1)}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=-\frac{1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}$$

und damit

$$a_n=(3\,n+1)\left(\sqrt{n^2}-\sqrt{n^2+1}\right)=-\frac{3\,n+1}{\sqrt{n^2}+\sqrt{n^2+1}}=$$
$$=-\frac{3+\frac{1}{n}}{\frac{\sqrt{n^2}}{n}+\frac{\sqrt{n^2+1}}{n}}=-\frac{3+\frac{1}{n}}{1+\sqrt{1+\frac{1}{n^2}}}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ -\frac{3+0}{1+\sqrt{1+0}}=-\frac{3}{2}.$$

b) Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt

$$\sqrt{n^2+2\,n}-n=\frac{\left(\sqrt{n^2+2\,n}-n\right)\left(\sqrt{n^2+2\,n}+n\right)}{\sqrt{n^2+2\,n}+n}=$$
$$=\frac{\sqrt{n^2+2\,n}^{\,2}-n^2}{\sqrt{n^2+2\,n}+n}=\frac{(n^2+2\,n)-n^2}{\sqrt{n^2+2\,n}+n}=\frac{2\,n}{\sqrt{n^2+2\,n}+n}=$$
$$=\frac{2}{\frac{\sqrt{n^2+2\,n}}{n}+1}=\frac{2}{\sqrt{1+\frac{2}{n}}+1}\ \xrightarrow[n\to\infty]{}\ \frac{2}{\sqrt{1+0}+1}=\frac{2}{1+1}=1.$$

12. Es sind zwei Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen zu betrachten:

a) Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und wir haben zu zeigen:

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ divergent} \iff (a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ divergent}.$$

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, und wir nehmen zum Widerspruch die Konvergenz von $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Dann wäre aber

$$(b_n)_{n\in\mathbb{N}} = \big((a_n + b_n) - a_n\big)_{n\in\mathbb{N}}$$

als Differenz konvergenter Folgen selbst konvergent, ein Widerspruch! Folglich ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

- Für „$\Longleftarrow$“ sei $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent, und wir nehmen zum Widerspruch die Konvergenz von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an. Dann wäre aber $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Summe konvergenter Folgen selbst konvergent, ein Widerspruch! Folglich ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

b) Nach Voraussetzung ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, es gibt also (obere bzw. untere) Schranken K_0, $L_0 \in \mathbb{R}$ mit $L_0 \leq a_n \leq K_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; wir haben zu zeigen:

$$\lim_{n\to\infty} b_n = +\infty \iff \lim_{n\to\infty} (a_n + b_n) = +\infty.$$

- Für „$\Longrightarrow$“ sei $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$, für alle $K \in \mathbb{R}$ gibt es also zu $K - L_0 \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ dann

$$b_n > K - L_0 \qquad \text{und damit} \qquad a_n + b_n > L_0 + (K - L_0) = K$$

gilt; folglich ist $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

- Für „$\Longleftarrow$“ sei $(a_n+b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$, für alle $K \in \mathbb{R}$ gibt es also zu $K + K_0 \in \mathbb{R}$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ dann

$$a_n + b_n > K + K_0$$

und damit

$$b_n = (a_n + b_n) + (-a_n) > (K + K_0) + (-K_0) = K$$

gilt; folglich ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.