MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

5. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n}} = 0$ ergibt sich für ein fest gewähltes $r > 0$ zunächst

$$a_n = \frac{\sqrt{r\,n}}{1 + r\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{r}\cdot\sqrt{n}}{\sqrt{n}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + r\right)} = \frac{\sqrt{r}}{\frac{1}{\sqrt{n}} + r} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{\sqrt{r}}{0 + r} = \frac{1}{\sqrt{r}};$$

damit besitzt die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = \dfrac{1}{\sqrt{r}} \in \mathbb{R}$. Dabei gilt

$$\begin{aligned} |a_n - a| &= \left|\frac{\sqrt{r\,n}}{1 + r\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{r}}\right| = \left|\frac{\sqrt{r\,n}\cdot\sqrt{r} - 1\cdot(1 + r\sqrt{n})}{(1 + r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}}\right| \\ &= \left|\frac{r\sqrt{n} - 1 - r\sqrt{n}}{(1 + r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}}\right| = \left|\frac{-1}{(1 + r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}}\right| \\ &= \frac{1}{(1 + r\sqrt{n})\cdot\sqrt{r}} \leq \frac{1}{r\sqrt{n}\cdot\sqrt{r}} = \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} \end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und es ist

$$\frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{1}{r\sqrt{r}\,\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \frac{1}{r^3\,\varepsilon^2} < n;$$

wir können also jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $n_0 > \dfrac{1}{r^3\,\varepsilon^2}$ wählen, und für alle $n \geq n_0$ gilt dann $n > \dfrac{1}{r^3\,\varepsilon^2}$ und damit

$$|a_n - a| \leq \frac{1}{r\sqrt{r}\sqrt{n}} < \varepsilon.$$

6. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Wir zeigen, daß die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen

$$c_n = \min\{a_n, b_n\} \qquad \text{und} \qquad d_n = \max\{a_n, b_n\}.$$

konvergieren, indem wir nachweisen, daß

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \min\{a, b\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = \max\{a, b\}$$

gilt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es

- wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon$ für alle $n \geq n_1$,
- wegen $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit $b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon$ für alle $n \geq n_2$;

es sei $n_0 = \max\{n_1, n_2\} \in \mathbb{N}_0$. Wir treffen nun folgende Fallunterscheidung:

- Fall 1: Sei $a = b$. Für alle $n \geq n_0$ gilt dann
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon \quad \text{und} \quad a - \varepsilon < b_n < a + \varepsilon$$
und folglich auch
$$a - \varepsilon < c_n < a + \varepsilon \quad \text{und} \quad a - \varepsilon < d_n < a + \varepsilon;$$
somit gilt nach Definition
$$\lim_{n\to\infty} c_n = a = \min\{a, b\} \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} d_n = a = \max\{a, b\}.$$
- Fall 2: Sei $a < b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{b-a}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann
$$a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon.$$
Damit folgt $c_n = a_n$ und $d_n = b_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \min\{a, b\}$$
und
$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \max\{a, b\}.$$
- Fall 3: Sei $a > b$. Speziell zu $\varepsilon = \frac{a-b}{2} > 0$ gilt für alle $n \geq n_0$ dann
$$b - \varepsilon < b_n < b + \varepsilon = \frac{a+b}{2} = a - \varepsilon < a_n < a + \varepsilon.$$
Damit folgt $c_n = b_n$ und $d_n = a_n$ alle $n \geq n_0$, und wir erhalten
$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} b_n = b = \min\{a, b\}$$
und
$$\lim_{n\to\infty} d_n = \lim_{n\to\infty} a_n = a = \max\{a, b\}.$$

7. Für jedes $n \in \mathbb{N}$ besteht das Folgenglied a_n aus genau sieben Summanden, und wir erhalten

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+6)^2 + (n+7)^2}{n^2} \\
&= \frac{(n+1)^2}{n^2} + \frac{(n+2)^2}{n^2} + \ldots + \frac{(n+6)^2}{n^2} + \frac{(n+7)^2}{n^2} \\
&= \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+2}{n}\right)^2 + \ldots + \left(\frac{n+6}{n}\right)^2 + \left(\frac{n+7}{n}\right)^2 \\
&= \Big(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)^2 + \Big(1 + \underbrace{\frac{2}{n}}_{\to 0}\Big)^2 + \ldots + \Big(1 + \underbrace{\frac{6}{n}}_{\to 0}\Big)^2 + \Big(1 + \underbrace{\frac{7}{n}}_{\to 0}\Big)^2 \\
&\underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \underbrace{(1+0)^2 + (1+0)^2 + \ldots + (1+0)^2 + (1+0)^2}_{7 \text{ Summanden}} = 7.
\end{aligned}$$

Dagegen besteht für jedes $n \in \mathbb{N}$ das Folgenglied

$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3}$$

aus genau n Summanden; die Anzahl der Summanden wird also für wachsendes n beliebig groß. Wir schreiben daher zunächst den Zähler des Folgenglieds b_n unter Verwendung der Formel

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gemäß

$$\begin{aligned}
(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2 &= \sum_{k=n+1}^{2n} k^2 = \\
= \sum_{k=1}^{2n} k^2 - \sum_{k=1}^{n} k^2 &= \frac{2n\,(2n+1)\,(4n+1)}{6} - \frac{n\,(n+1)\,(2n+1)}{6} = \\
&= \frac{n\,(2n+1)}{6} \cdot \big[2(4n+1) - (n+1)\big] = \frac{n\,(2n+1)\,(7n+1)}{6}
\end{aligned}$$

ohne Summenzeichen und erhalten damit

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3} = \\
&= \frac{n\,(2n+1)\,(7n+1)}{6n^3} = \frac{n}{6n} \cdot \frac{2n+1}{n} \cdot \frac{7n+1}{n} = \\
&= \frac{1}{6} \cdot \underbrace{\Big(2 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)}_{\to 2} \cdot \underbrace{\Big(7 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Big)}_{\to 7} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 7 = \frac{7}{3}.
\end{aligned}$$

8. a) Da die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, ist die Folge $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und damit insbesondere beschränkt; es gibt also ein $M > 0$ mit $|a_n - a| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   Wir weisen nun anhand der Definition nach, daß auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittelwerte

$$b_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert; sei dazu $\varepsilon > 0$.

   - Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ gibt es zu $\frac{\varepsilon}{2} > 0$ ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit

$$|a_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_1;$$

- dann gibt es wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{Mn_1}{n} = 0$ ein $n_2 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{Mn_1}{n} < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \geq n_2.$$

Sei nun $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$; für alle $n \geq n_0$ gilt dann

$$\begin{aligned}
|b_n - a| &= \left|\frac{1}{n}(a_1 + \ldots + a_n) - a\right| = \frac{1}{n}\left|(a_1 + \ldots + a_n) - n \cdot a\right| \\
&= \frac{1}{n}\left|(a_1 - a) + \ldots + (a_n - a)\right| \leq \frac{1}{n}\big(|a_1 - a| + \ldots + |a_n - a|\big) \\
&= \frac{1}{n}\Big(\underbrace{|a_1 - a|}_{\leq M} + \ldots + \underbrace{|a_{n_1} - a|}_{\leq M}\Big) + \\
&\qquad + \frac{1}{n}\Big(\underbrace{|a_{n_1+1} - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}} + \ldots + \underbrace{|a_n - a|}_{<\frac{\varepsilon}{2}}\Big) \\
&\leq \frac{1}{n} \cdot n_1 \cdot M + \frac{1}{n} \cdot \underbrace{(n - n_1)}_{\leq n} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{Mn_1}{n} + \frac{\varepsilon}{2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent mit $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = a$.

b) Die alternierende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt die beiden Häufungspunkte -1 und 1, ist also insbesondere nicht konvergent. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt aber

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \underbrace{(a_1 + a_2)}_{=0} + \underbrace{(a_3 + a_4)}_{=0} + \ldots + a_n = \begin{cases} 0, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ -1, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

und damit

$$|b_n| = \left|\frac{1}{n} \cdot \sum_{k=1}^{n} a_k\right| = \frac{1}{n} \cdot \underbrace{\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right|}_{\leq 1} \leq \frac{1}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0,$$

woraus sich mit dem Schrankenlemma $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ ergibt.