MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Repetitorium
03.02.2020

Repetitorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. Gegeben ist die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1} \qquad \text{für alle} \qquad n \geq 2.$$

a) Wir zeigen

$$a_n = \frac{2\,n}{n+1} \qquad \text{für alle} \qquad n \geq 2$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 2$“ gilt

$$a_2 = \prod_{k=2}^{2} \frac{k^2}{k^2-1} = \frac{2^2}{2^2-1} = \frac{4}{3} = \frac{2\cdot 2}{2+1}.$$

- Für „$n \to n+1$“ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \prod_{k=2}^{n+1} \frac{k^2}{k^2-1} = \left(\prod_{k=2}^{n} \frac{k^2}{k^2-1}\right) \cdot \underbrace{\frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1}}_{\text{für } k=n+1} = a_n \cdot \frac{(n+1)^2}{(n+1)^2-1} \\ &= \frac{2\,n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{(n^2+2\,n+1)-1} = \frac{2\,n}{n+1} \cdot \frac{(n+1)^2}{n(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2}. \end{aligned}$$

b) Wegen

$$a_n = \frac{2\,n}{n+1} = \frac{2}{1+\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{1+0} = 2$$

besitzt die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ den Grenzwert $a = 2$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{2\,n}{n+1} - 2\right| = \left|\frac{2\,n - 2\,(n+1)}{n+1}\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} < \frac{2}{n};$$

zu einem beliebigen $\varepsilon > 0$ können wir daher $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$n_0 \geq 2 \quad \text{und} \quad \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon \qquad \text{also} \qquad n_0 \geq \max\left\{2,\ \frac{2}{\varepsilon}\right\},$$

wählen, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ ergibt sich

$$|a_n - a| < \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} \leq \varepsilon.$$

2. a) Wir betrachten die Folge reeller Zahlen

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{2\,\sin(n)}{n^2+1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Es ist $-1 \leq \sin(n) \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit erhalten wir

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{\overbrace{2\,\sin(n)}^{-2\leq 2\,\sin(n)\leq 2}}{\underbrace{n^2+1}_{\to\infty}} = 0.$$

Wir weisen nun anhand der Definition nach, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 0$ besitzt. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{2\,\sin(n)}{n^2+1} - 0\right| = \left|\frac{2\,\sin(n)}{n^2+1}\right| = \frac{2\,|\sin(n)|}{n^2+1} \underset{|\sin(n)|\leq 1}{\leq}$$
$$\leq \frac{2}{n^2+1} < \frac{2}{n^2} \leq \frac{2}{n} \leq \frac{2}{n_0} < \varepsilon.$$

Mit $n_0 = 2000$ gilt dann

$$|a_n - a| < \frac{2}{n_0} = \frac{2}{2000} = 10^{-3}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
b_n &= \sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n} \\
&= \frac{\left(\sqrt{n^2+n} - \sqrt{n^2-n}\right)\cdot\left(\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}\right)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} \\
&= \frac{(n^2+n) - (n^2-n)}{\sqrt{n^2+n} + \sqrt{n^2-n}} = \frac{2\,n}{\sqrt{n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)} + \sqrt{n^2\left(1-\frac{1}{n}\right)}} \\
&= \frac{2}{\sqrt{1+\frac{1}{n}} + \sqrt{1-\frac{1}{n}}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{2}{\sqrt{1+0} + \sqrt{1-0}} = 1.
\end{aligned}$$

c) Wir betrachten die Folge

$$(c_n)_{n\in\mathbb{N}} \qquad \text{mit} \qquad c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Unter Verwendung der Monotonie der n–ten Wurzel gilt

$$\begin{aligned}
c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} &\geq \sqrt[n]{0 + 5^n} = \sqrt[n]{5^n} = 5 = a_n \\
c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} &\leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2\cdot 5^n} = \sqrt[n]{2}\cdot 5 = b_n
\end{aligned}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, und wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} 5 = 5 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt[n]{2}}_{\to 1}\cdot 5 = 5.$$

erhalten wir nach dem Schrankenlemma

$$\lim_{n\to\infty} c_n = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{3^n + 5^n} = 5.$$

3. a) • Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} = \sqrt{\frac{n^2+1}{(n+1)\cdot(2n+1)}} =$$
$$= \sqrt{\frac{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot n\left(2+\frac{1}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}};$$

wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0$$

ergibt sich zunächst

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)} = \frac{1+0}{(1+0)\cdot(2+0)} = \frac{1}{2}$$

und damit wegen der Stetigkeit der Quadratwurzel (an der Stelle $\frac{1}{2}$) dann

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n^2+1}}{\sqrt{(n+1)(2n+1)}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{1+\frac{1}{n^2}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\cdot\left(2+\frac{1}{n}\right)}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

• Für alle $x > 0$ gilt

$$\frac{e^{-x^3}}{e^{-x^2}} = e^{(-x^3)-(-x^2)} = e^{-x^2(x-1)};$$

wegen

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(-\underbrace{x^2}_{\to+\infty}\underbrace{(x-1)}_{\to+\infty}\Big) = -\infty$$

ergibt sich

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{-x^3}}{e^{-x^2}} = \lim_{x\to+\infty}e^{-x^2(x-1)} = 0.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} = \frac{(2n^2+1)\cdot(n+1)^n}{(3n+1)\cdot(n\cdot n^n)} = \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n}\cdot\frac{(n+1)^n}{n^n} =$$
$$= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot n}\cdot\left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e, so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \left(\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}}_{\to\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \right) = \frac{2}{3}\, e.$$

4. a) Wir zeigen Sie $a_n \geq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
   - Für „$n = 1$" ist $a_1 = 3$ und damit $a_1 \geq 2$.
   - Für „$n \to n+1$" ist $a_n \geq 2$, insbesondere also $a_n > 0$, und es folgt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - 2 &= \frac{a_n^2+4}{2\,a_n} - 2 = \frac{(a_n^2+4) - 2\cdot(2\,a_n)}{2\,a_n} = \\ &= \frac{a_n^2 - 4\,a_n + 4}{2\,a_n} = \frac{(a_n-2)^2}{2\,a_n} \geq 0, \qquad \text{also} \quad a_{n+1} \geq 2. \end{aligned}$$

   b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt wegen $a_n \geq 2$ zum einen $a_n^2 \geq 4$, also $a_n^2 - 4 \geq 0$, und zum anderen $2\,a_n \geq 4 > 0$, woraus sich

$$a_n - a_{n+1} = a_n - \frac{a_n^2+4}{2\,a_n} = \frac{a_n\cdot(2\,a_n) - (a_n^2+4)}{2\,a_n} = \frac{a_n^2-4}{2\,a_n} \geq 0$$

   und damit $a_n \geq a_{n+1}$ ergibt; folglich ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

   c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) etwa durch 2 nach unten beschränkt und gemäß b) monoton fallend, insgesamt also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt damit $a \geq 2$, und wir erhalten mit der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+4}{2\,a_n} = \frac{a^2+4}{2\,a},$$

   woraus sich

$$2\,a^2 = a^2 + 4, \qquad \text{also} \qquad a^2 = 4,$$

   und damit wegen $a \geq 2$ schon $a = 2$ ergibt.

5. Für die fest gewählte positive reelle Zahl $r > 0$ wird die durch

$$a_1 = r \qquad \text{sowie} \qquad a_{n+1} = \sqrt[3]{r\,a_n^2 + a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachtet.

   a) Wir zeigen $0 < a_n < r+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
   - Für „$n = 1$" gilt $a_1 = r > 0$ und damit $0 < a_1 < r+1$.
   - Für „$n \to n+1$" folgt aus $0 < a_n < r+1$ zunächst

$$0 < a_n^2 < (r+1)^2 = r^2 + 2\,r + 1,$$

wegen $r > 0$ mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation dann

$$0 < r \cdot a_n^2 < r \cdot \left(r^2 + 2\,r + 1\right) = r^3 + 2\,r^2 + r,$$

wegen $0 < a_n < r + 1$ mit dem Monotoniegesetz der Addition ferner

$$\begin{aligned} 0 < r\,a_n^2 + a_n &< \left(r^3 + 2\,r^2 + r\right) + (r + 1) = \\ &= r^3 + \underbrace{2\,r^2}_{<3\,r^2} + \underbrace{2\,r}_{<3\,r} + 1 \underset{\text{da } r>0}{<} r^3 + 3\,r^2 + 3\,r + 1 = (r+1)^3, \end{aligned}$$

woraus sich wegen der strengen Monotonie der Kubikwurzel schließlich

$$0 < a_{n+1} = \sqrt[3]{r\,a_n^2 + a_n} < \sqrt[3]{(r+1)^3} = r + 1$$

ergibt.

b) Wir zeigen $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:

- Für „$n = 1$" gilt $a_1 = r > 0$, mit dem Monotoniegesetz der Addition

  $$r\,a_1^2 + a_1 = a_1 \cdot a_1^2 + a_1 = a_1^3 + a_1 > a_1^3$$

  und mit der strengen Monotonie der Kubikwurzel also

  $$a_2 = \sqrt[3]{r\,a_1^2 + a_1} > \sqrt[3]{a_1^3} = a_1.$$

- Für „$n \to n + 1$" folgt aus $a_n < a_{n+1}$ wegen $a_n > 0$ zunächst

  $$0 < a_n^2 < a_{n+1}^2,$$

  wegen $r > 0$ mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation dann

  $$0 < r \cdot a_n^2 < r \cdot a_{n+1}^2,$$

  wegen $0 < a_n < a_{n+1}$ mit dem Monotoniegesetz der Addition ferner

  $$0 < r\,a_n^2 + a_n < r\,a_{n+1}^2 + a_{n+1},$$

  woraus sich wegen der strengen Monotonie der Kubikwurzel schließlich

  $$a_{n+1} = \sqrt[3]{r\,a_n^2 + a_n} < \sqrt[3]{r\,a_{n+1}^2 + a_{n+1}} = a_{n+2}$$

  ergibt.

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

c) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist gemäß a) durch $r+1$ nach oben beschränkt und gemäß b) monoton wachsend, nach dem Hauptsatz über monotone Folgen mithin konvergent; für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1}$ und damit

$$a^3 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^3 = \lim_{n\to\infty} \left(r\,a_n^2 + a_n\right) = r\,a^2 + a,$$

woraus sich

$$0 = a^3 - \left(r\,a^2 + a\right) = a \cdot \left(a^2 - r\,a - 1\right)$$

und damit

$$a = 0 \qquad \text{oder} \qquad a = \frac{-(-r) \pm \sqrt{(-r)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1)}}{2 \cdot 1} = \frac{r \pm \sqrt{r^2 + 4}}{2}$$

Wegen $a_n \geq r$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist auch $a \geq r > 0$, und es folgt

$$a = \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2}.$$

6. Gegeben sind die konvergenten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit den Grenzwerten

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n \qquad \text{und} \qquad y = \lim_{n\to\infty} y_n;$$

damit konvergiert auch jede Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x und jede Teilfolge $(y_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen y. Es ist $x \neq y$ vorausgesetzt.

a) Die durch

$$a_n = \begin{cases} x_n, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt wegen

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k} \underset{n=2k \text{ gerade}}{=} \lim_{k\to\infty} x_{2k} = x$$

und

$$\lim_{k\to\infty} a_{2k-1} \underset{n=2k-1 \text{ ungerade}}{=} \lim_{k\to\infty} y_{2k-1} = y$$

die beiden Häufungspunkte x und y mit $x \neq y$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent.

b) Für die durch

$$b_n = \begin{cases} x_n + y_{n+1}, & \text{falls } n \text{ gerade,} \\ x_{n+1} + y_n, & \text{falls } n \text{ ungerade,} \end{cases}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ definierte Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k} \underset{n=2k \text{ gerade}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(x_{2k} + y_{2k+1}\right) = x + y$$

und

$$\lim_{k\to\infty} b_{2k-1} \underset{n=2k-1 \text{ ungerade}}{=} \lim_{k\to\infty} \left(x_{2k} + y_{2k-1}\right) = x + y;$$

da durch die Betrachtung der beiden Teilfolgen $(b_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfaßt sind, ist $x + y$ auch Grenzwert der Gesamtfolge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, und diese ist damit konvergent.

c) Wir betrachten die durch

$$c_1 = x_1 - y_1 \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = c_n + \frac{x_{n+1} - y_{n+1}}{\sqrt{n+1}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für die beiden konstanten Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $x = 1$ sowie $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $y_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und damit auch $y = 0$; damit ist

$$c_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad c_{n+1} = c_n + \frac{1}{\sqrt{n+1}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

also

$$c_n = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Folglich ist die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$, und diese ist divergent.

7. a) Wir rechnen die Beziehung

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)} = \underbrace{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2}\right)}_{(*)}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ direkt nach; dabei gilt

$$\begin{aligned}
(*) \quad &= \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) - \left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right)\right] \\
&= \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{(n+1)-n}{n(n+1)} - \frac{(n+2)-(n+1)}{(n+1)(n+2)}\right] \\
&= \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{1}{n(n+1)} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{(n+2)-n}{n(n+1)(n+2)} \\
&= \quad \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{n(n+1)(n+2)} = \frac{1}{n(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

b) Zu betrachten ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für die n–te Partialsumme s_n für $n \geq 2$ gilt gemäß a) dabei

$$\begin{aligned}
s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \quad &= \quad \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{2}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+1} + \frac{1}{k+2}\right) \\
&= \quad \frac{1}{2} \cdot \sum_{k=1}^{n} \left[\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) - \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)\right] \\
&= \quad \frac{1}{2} \cdot \left[\underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)}_{(*_1)} - \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right)}_{(*_2)}\right]
\end{aligned}$$

mit

$$
\begin{aligned}
(*_1) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \\
&= \Bigg[\underbrace{1}_{\text{für } k=1}+\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{für } k=2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{für } k=n}\Bigg)\Bigg]- \\
&\qquad -\Bigg[\Bigg(\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{für } k=1}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n}}_{\text{für } k=n-1}\Bigg)+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{für } k=n+1}\Bigg] \\
&= 1-\frac{1}{n+1}
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
(*_2) &= \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1}-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+2} \\
&= \Bigg[\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{für } k=1}+\Bigg(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{für } k=2}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{für } k=n}\Bigg)\Bigg]- \\
&\qquad -\Bigg[\Bigg(\underbrace{\frac{1}{3}}_{\text{für } k=1}+\ldots+\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\text{für } k=n-1}\Bigg)+\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\text{für } k=n+1}\Bigg] \\
&= \frac{1}{2}-\frac{1}{n+2},
\end{aligned}
$$

zusammen also

$$
s_n=\frac{1}{2}\Bigg[\underbrace{\left(1-\frac{1}{n+1}\right)}_{(*_1)}-\underbrace{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)}_{(*_2)}\Bigg].
$$

Wegen

$$
s_n=\frac{1}{2}\Bigg[\Bigg(1-\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{\to 0}\Bigg)-\Bigg(\frac{1}{2}-\underbrace{\frac{1}{n+2}}_{\to 0}\Bigg)\Bigg] \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot\left[1-\frac{1}{2}\right]=\frac{1}{4}
$$

ist die gegebene Reihe konvergent, und es gilt

$$
\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}s_n=\frac{1}{4}.
$$

8. a) Wir betrachten die Reihe

$$
\sum_{n=0}^{\infty}(-2)^n\cdot\frac{5}{3^{n+1}}.
$$

Es ist

$$(-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = (-2)^n \cdot \frac{5}{3^n \cdot 3} = \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

und damit

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{5}{3} \cdot \left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{5}{3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n.$$

Die gegebene Reihe besitzt also die Gestalt der geometrischen Reihe $c \cdot \sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit den Konstanten $c = \frac{5}{3}$ und $q = -\frac{2}{3}$; wegen $|q| < 1$ ist sie konvergent und besitzt den Grenzwert $c \cdot \frac{1}{1-q}$, wir erhalten demnach

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-2)^n \cdot \frac{5}{3^{n+1}} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{1 - (-\frac{2}{3})} = \frac{5}{3} \cdot \frac{3}{5} = 1.$$

b) Wir untersuchen nun die gegebene Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$, also

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{1}{n \cdot \ln n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \text{ mit } n \geq 2,$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz.

- Die Folgen $(n)_{n\geq 2}$ und $(\ln n)_{n\geq 2}$ sind monoton wachsend, und wegen $n > 0$ und $\ln n > 0$ für alle $n \geq 2$ ist auch die Folge $(n \cdot \ln n)_{n\geq 2}$ positiver reeller Zahlen monoton wachsend, so daß $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Folge positiver reeller Zahlen ist. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\underbrace{n}_{\to\infty} \cdot \underbrace{\ln n}_{\to\infty}} = 0$$

ist $(a_n)_{n\geq 2}$ zudem eine Nullfolge; damit konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n a_n$ nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium.

- Die gegebene (alternierende) Reihe ist genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} |(-1)^n \cdot a_n| = \sum_{n=2}^{\infty} |a_n| \underset{a_n>0}{=} \sum_{n=2}^{\infty} a_n$$

konvergiert; dabei ist $(a_n)_{n\geq 2}$ eine monoton fallende Folge nichtnegativer reeller Zahlen. Die dazu verdichtete Reihe

$$\sum_{m=1}^{\infty} 2^m a_{2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2^m}{2^m \cdot \ln 2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{\ln 2^m} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m \cdot \ln 2} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$$

ist wie die harmonische Reihe $\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m}$ divergent, so daß die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium ebenfalls divergiert.

Zusammenfassend ist die gegebene Reihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n \cdot \ln n}$$

(nach dem Leibnizschen Konvergenzkriterium) konvergent, aber (nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium) nicht absolut konvergent.

9. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} =$$

$$= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}}$$

sowie wegen der Monotonie der Quadratwurzel

$$1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}} \leq 1 + \sqrt{1 - 0} = 1 + \sqrt{1} = 2,$$

insgesamt also

$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}} = \frac{\frac{1}{n}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n}}} \geq \frac{\frac{1}{n}}{2} = \frac{1}{2n}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n}}\right)$ die (wie harmonische Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n}$) divergente Minorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{2n}$ und ist damit nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ ergibt sich mit Hilfe der 3. binomischen Formel

$$0 \leq 1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}} = \frac{\left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right) \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} =$$

$$= \frac{1^2 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}^2}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} = \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}} \leq \frac{\frac{1}{n^2}}{1 + 0} = \frac{1}{n^2}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{n^2}}\right)$ die konvergente Majorante $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

10. Für die erste Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}, \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \text{mit} \quad a_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \cdot \frac{n^n}{n!}\right| = \frac{n! \cdot (n+1)}{(n+1)^n \cdot (n+1)} \cdot \frac{n^n}{n!} = \frac{n^n}{(n+1)^n} =$$

$$= \frac{n^n}{\left(n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)\right)^n} = \frac{n^n}{n^n \cdot \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e} < 1;$$

damit ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Quotientenkriterium konvergent, und die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist insbesondere eine Nullfolge. Für die zweite Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n! + n^n}, \qquad \text{also} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{n^n}{n! + n^n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt

$$b_n = \frac{n^n}{n! + n^n} = \frac{n^n}{n^n \cdot \left(\frac{n!}{n^n} + 1\right)} = \frac{1}{\frac{n!}{n^n} + 1} = \frac{1}{a_n + 1} \underset{n \to \infty}{\longrightarrow} \frac{1}{0 + 1} = 1 \neq 0;$$

damit ist die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder keine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ insbesondere divergent.

11. a)
- Für $p \leq 2$ gilt

$$\left|\frac{n^p}{n^4 + 1}\right| = \frac{n^p}{n^4 + 1} \underset{p \leq 2}{\leq} \frac{n^2}{n^4 + 1} \leq \frac{n^2}{n^4} = \frac{1}{n^2} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + 1}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- Für $p \geq 3$ gilt

$$\frac{n^p}{n^4 + 1} \underset{p \geq 3}{\geq} \frac{n^3}{n^4 + 1} \geq \frac{n^3}{n^4 + n^4} = \frac{n^3}{2\,n^4} = \frac{1}{2\,n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^p}{n^4 + 1}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2\,n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

b) Die Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty}(1-\ln x)^n$ besitzt die Gestalt der geometrischen Reihe $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1 - \ln x$. Diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|1-\ln x| < 1 \iff -1 < 1 - \ln x < 1 \iff$$
$$\iff -2 < -\ln x < 0 \iff 0 < \ln x < 2 \iff 1 < x < e^2$$

also genau für $x \in \,]1, e^2[$, und in diesem Fall gilt für die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty}(1-\ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1-(1-\ln x)} = \frac{1}{\ln x}.$$

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$\sqrt[n]{\left|\frac{(\cos x)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|\cos x|^n}{n}} = \frac{|\cos x|}{\sqrt[n]{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{|\cos x|}{1} = |\cos x| \leq 1;$$

damit ist die Reihe nach dem Wurzelkriterium für $|\cos x| < 1$, also für $x \in \mathbb{R} \setminus \{k \cdot \pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$ (absolut) konvergent. Ferner gilt:

- Für $x = (2\,\ell + 1) \cdot \pi$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos x = -1$, und damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$ als alternierende harmonische Reihe konvergent.
- Für $x = 2\,\ell \cdot \pi$ mit $\ell \in \mathbb{Z}$ gilt $\cos x = 1$, und damit ist die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(\cos x)^n}{n} = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ als harmonische Reihe divergent.

Insgesamt ist die Reihe genau für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{2\,\ell \cdot \pi \mid \ell \in \mathbb{Z}\}$ konvergent.

12. Für eine Polynomfunktion $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $p(x) = ax^2 + bx + c$, sind die Funktionen

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{-x}, & \text{für } x < 0, \\ p(x), & \text{für } 0 \leq x < 1, \\ \frac{2}{x}, & \text{für } x \geq 1 \end{cases} \qquad \text{und} \quad g(x) = \begin{cases} p(x), & \text{für } x \leq 2, \\ -2x + 4, & \text{für } x > 2; \end{cases}$$

zu betrachten.

a) Zunächst ist f auf $]-\infty; 0[$ als Wurzelfunktion, auf $]0; 1[$ als Polynomfunktion sowie auf $]1; +\infty[$ als gebrochenrationale Funktion stetig; ferner ist f wegen

$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+} p(x) \underset{p \text{ stetig}}{=} p(0) = f(0)$$

genau dann in 0 stetig, wenn auch

$$f(0) = \lim_{x\to 0-} f(x) = \lim_{x\to 0-} \sqrt{-x} = \sqrt{0} = 0,$$

also $c = 0$ gilt, sowie wegen

$$\lim_{x\to 1+} f(x) = \lim_{x\to 1+} \frac{2}{x} = \frac{2}{1} = 2 = f(1)$$

genau dann in 1 stetig, wenn auch

$$f(1) = \lim_{x\to 1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \left(a\,x^2 + b\,x + c\right) = a + b + c,$$

also $a+b+c=2$ gilt. Folglich ist f genau dann eine stetige Funktion, wenn $a+b=2$ und $c=0$ gilt.

Des weiteren ist g zunächst auf $]-\infty;2[$ also Polynomfunktion sowie auf $]2;+\infty[$ als lineare Funktion stetig; ferner ist g wegen

$$\lim_{x\to 2-} g(x) = \lim_{x\to 2-} p(x) \underset{p\text{ stetig}}{=} p(2) = g(2)$$

genau dann in 2 stetig, wenn auch

$$g(2) = \lim_{x\to 2+} g(x) = \lim_{x\to 2+} (-2\,x + 4) = 0,$$

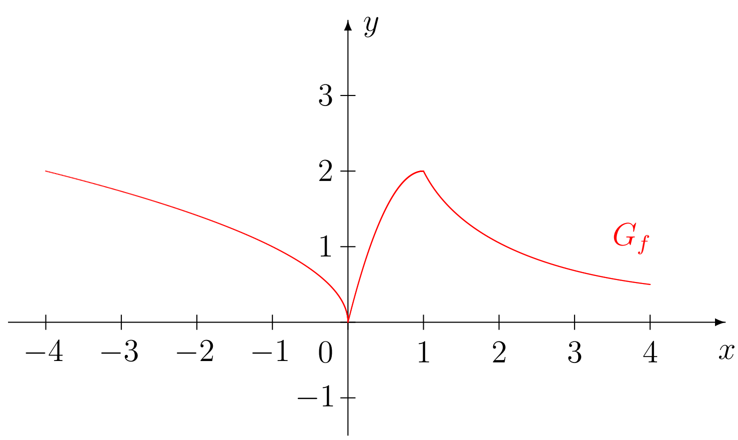
also $4\,a + 2\,b + c = 0$ gilt; in diesem Fall ist dann g eine stetige Funktion. Insgesamt ist also sowohl f als auch g eine stetige Funktion, wenn

$$a+b=2 \qquad \text{und} \qquad c=0 \qquad \text{und} \qquad 4\,a+2\,b+c=0,$$

also genau für die Wahl $a=-2$, $b=4$ und $c=0$, und man erhält

$$p(x) = -2\,x^2 + 4\,x = -2\,(x-1)^2 + 2.$$

b) Für den Graphen der in a) ermittelten Funktion f ergibt sich die Skizze:



c) Der Graph G_p der quadratischen Funktion

$$p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad p(x) = -2\,x^2 + 4\,x = -2\,(x-1)^2 + 2,$$

beschreibt eine nach unten geöffnete Parabel mit dem Scheitel $(1;2)$; dieser stimmt mit dem Graphen G_g auf $]-\infty;2]$ überein. Damit ist g auf dem (maximalen) Intervall $I =]-\infty;1]$ streng monoton, insbesondere also umkehrbar, und die Umkehrfunktion $(g|_I)^{-1} : D \to \mathbb{R}$ besitzt den Definitionsbereich

$D = W_{g|_I} = \,]-\infty;2]$. Für $y \in \,]-\infty;2]$ und $x \in \,]-\infty;1[$ gilt

$$g(x) = y \iff -2(x-1)^2 + 2 = y \iff 2 - y = 2(x-1)^2 \iff$$
$$\iff 1 - \frac{y}{2} = (x-1)^2 \underset{x\leq 2}{\iff} \pm\sqrt{2-\frac{y}{2}} = x - 1 \iff$$
$$\iff x = 1 \pm \sqrt{2-\frac{y}{2}} \underset{x\leq 1}{\iff} x = 1 - \sqrt{2-\frac{y}{2}};$$

damit ist

$$(g|_I)^{-1} : \,]\infty;2] \to \mathbb{R}, \quad (g|_I)^{-1}(y) = 1 - \sqrt{2-\frac{y}{2}}.$$

13. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^x + \ln x,$$

und stützen uns auf die Eigenschaften von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$.

a) Seien $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $x_1 < x_2$; es gilt:
- da exp streng monoton wachsend ist, folgt daraus $e^{x_1} < e^{x_2}$;
- da ln streng monoton wachsend ist, folgt daraus $\ln x_1 < \ln x_2$;

mit dem Monotoniegesetz der Addition ergibt sich somit

$$f(x_1) = e^{x_1} + \ln x_1 < e^{x_2} + \ln x_1 < e^{x_2} + \ln x_2 = f(x_2).$$

Folglich ist f streng monoton wachsend, insbesondere also umkehrbar; da die Funktion f zudem auf dem Intervall $\mathbb{R}^+ = \,]0,+\infty[$ definiert ist, ist die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ stetig.

b) Für den Wertebereich W_f von f zeigen wir $W_f = \mathbb{R}$; sei dazu $y \in \mathbb{R}$. Wegen

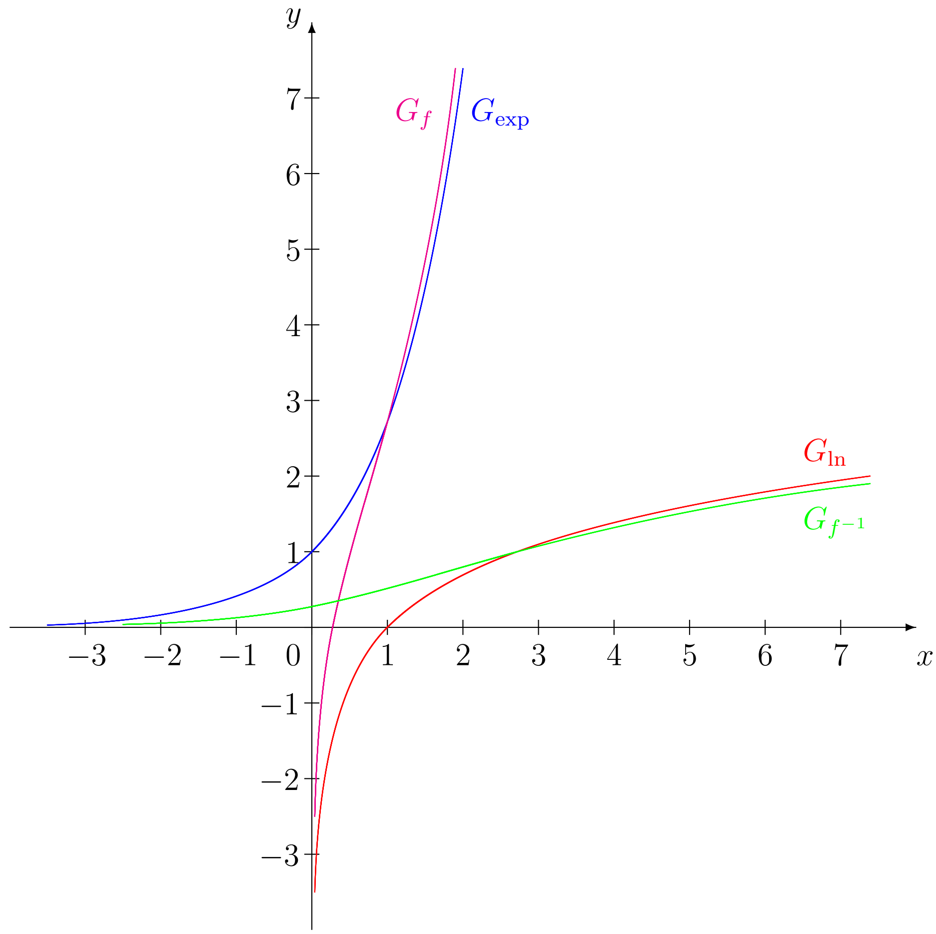
$$\lim_{x\to 0+} f(x) = \lim_{x\to 0+}\Bigg(\underbrace{e^x}_{\to e^0=1} + \underbrace{\ln x}_{\to -\infty}\Bigg) = -\infty$$

gibt es ein $a \in \,]0,1[$ mit $f(a) \leq y$, und wegen

$$\lim_{x\to +\infty} f(x) = \lim_{x\to +\infty}\Bigg(\underbrace{e^x}_{\to +\infty} + \underbrace{\ln x}_{\to +\infty}\Bigg) = +\infty$$

gibt es ein $b \in \,]1,+\infty[$ mit $f(b) \geq y$; zudem ist f als Summe der beiden stetigen Funktionen $\exp|_{\mathbb{R}^+}$ und ln selbst stetig. Damit existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a,b] \subseteq \mathbb{R}^+$ mit $f(\xi) = y$; folglich ist $y \in W_f$.

c) Unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse ergibt sich die folgende Skizze:



14. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x - 2.$$

a) Gemäß der Definition der allgemeinen Potenz

$$a^b = \exp(b \cdot \ln a) \qquad \text{für alle} \quad a \in \mathbb{R}^+ \quad \text{und} \quad b \in \mathbb{R}$$

gilt

$$f(x) = x^x - 2 = \exp(x \cdot \ln x) - 2 \qquad \text{für alle} \quad x \in \mathbb{R}^+;$$

da sowohl der Minuend (als Verkettung der Exponentialfunktion mit dem Produkt einer linearen Funktion und des natürlichen Logarithmus) als auch der Subtrahend (als konstante Funktion) stetig ist, ist die Funktion f als Differenz stetiger Funktionen selbst stetig.

b) Wir betrachten die Einschränkung $f|_{[1,2]}$ der gemäß a) stetigen Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[1, 2]$; dabei gilt

$$f(1) = 1^1 - 2 = 1 - 2 = -1 < 0$$

und

$$f(2) = 2^2 - 2 = 4 - 2 = 2 > 0.$$

Damit existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in \,]1, 2[\, \subseteq \mathbb{R}^+$ mit $f(\xi) = 0$.

c) Es ist

$$f(\tfrac{1}{4}) = \left(\tfrac{1}{4}\right)^{\frac{1}{4}} - 2 = \sqrt[4]{\tfrac{1}{4}} - 2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - 2$$

und

$$f(\tfrac{1}{2}) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 = \sqrt[2]{\tfrac{1}{2}} - 2 = \tfrac{1}{\sqrt{2}} - 2,$$

also $f(\frac{1}{4}) = f(\frac{1}{2})$; folglich ist f nicht injektiv, mithin nicht umkehrbar.

15. a) Wir betrachten die (als Differenz zweier stetiger Funktionen) selbst stetige Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - x.$$

Da f zudem monoton fallend ist, gilt für $x < 0$ zum einen

$$h(x) = f(x) - x \geq f(0) - x \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} +\infty,$$

so daß es ein $a < 0$ mit $h(a) > 0$ gibt, sowie für $x > 0$ zum anderen

$$h(x) = f(x) - x \leq f(0) - x \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} -\infty,$$

so daß es ein $b > 0$ mit $h(b) < 0$ gibt; damit liefert der Nullstellensatz für die stetige Funktion h auf dem abgeschlossenen Intervall $[a; b]$ eine Stelle $\xi \in \,]a; b[$ mit $h(\xi) = 0$, also mit $f(\xi) = \xi$.

b) Die Stelle $\xi \in \mathbb{R}$ von b) ist eindeutig; ansonsten gäbe es ein $\zeta \in \mathbb{R}$ mit $f(\zeta) = \zeta$ und $\zeta \neq \xi$, wobei wegen der Monotonie von f für $\zeta < \xi$ in $\zeta = f(\zeta) \geq f(\xi) = \xi$ sowie für $\zeta > \xi$ in $\zeta = f(\zeta) \leq f(\xi) = \xi$ jeweils ein Widerspruch entstünde.

16. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\arctan x}{x^2 + 1};$$

diese ist (als Quotient) des Arcustangens und einer Polynomfunktion stetig.

a) Es ist

$$f(1) = \frac{\arctan 1}{1^2 + 1} = \frac{\frac{\pi}{4}}{2} = \frac{\pi}{8}$$

sowie

$$f(-x) = \frac{\arctan(-x)}{(-x)^2 + 1} = \frac{-\arctan x}{x^2 + 1} = -\frac{\arctan x}{x^2 + 1} = -f(x)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$.

b) Zum Nachweis von $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right] \subseteq W_f$ sei $y \in \left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$; gemäß a) gilt

$$f(-1) = -f(1) = -\frac{\pi}{8} \qquad \text{und} \qquad f(1) = \frac{\pi}{8},$$

also $f(-1) \leq y \leq f(1)$, und der Zwischenwertsatz liefert für die Einschränkung $f|_{[-1,1]}$ der stetigen Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[-1, 1]$ ein $\xi \in [-1, 1] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = y$, also $y \in W_f$.

c) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$-\frac{\pi}{2} < \arctan x < \frac{\pi}{2}, \qquad \text{also} \quad |\arctan x| < \frac{\pi}{2};$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| > 2$, also $x^2 > 4$, gilt damit

$$|f(x)| = \left|\frac{\arctan x}{x^2+1}\right| = \frac{|\arctan x|}{x^2+1} < \frac{\frac{\pi}{2}}{4+1} = \frac{\pi}{10}.$$

d) Wir betrachten die Einschränkung $f^* = f|_{[-2,2]}$ der stetigen Funktion f auf das abgeschlossene Intervall $[-2,2]$, und nach dem Satz von Weierstraß gibt es p, $q \in [-2,2]$ mit $W_{f^*} = [f(p), f(q)]$; wir haben $W_f = W_{f^*}$ zu zeigen.

Es gilt stets $W_f \supseteq W_{f^*}$, und für „$\subseteq$" sei $y \in W_f$ mit $y = f(x)$ für ein $x \in \mathbb{R}$:

- Für $|x| \leq 2$, also $x \in [-2,2]$, gilt $y = f(x) = f^*(x) \in W_{f^*}$.
- Für $|x| > 2$ gilt $|f(x)| < \frac{\pi}{10}$ gemäß c), insbesondere also $|f(x)| < \frac{\pi}{8}$ und damit $f(-1) < f(x) < f(1)$, insbesondere also $f(p) < f(x) < f(q)$, und damit $y = f(x) \in W_{f^*}$.

Insgesamt ergibt sich damit $W_f = [f(p), f(q)]$.