Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Lösungsvorschlag —

1. a)
   - – Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt nach oben beschränkt, wenn es ein $K \in \mathbb{R}$ gibt, so daß $a_n \leq K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
     – Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen heißt monoton wachsend, wenn $a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
   - Die reelle Zahl $a \in \mathbb{R}$ heißt Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt, so daß für alle $n \geq n_0$ dann $|a_n - a| < \varepsilon$ gilt.
   - Für eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen gilt:
     – Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen das Supremum der Folgenglieder $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.
     – Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unbeschränkt, so divergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt gegen $+\infty$.

   b) Es ist die für einen beliebigen Startwert $a_1 \in \,]0,1[$ durch

$$a_{n+1} = \frac{a_n^2+2}{3} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben.
   - Wir zeigen $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ durch vollständige Induktion:
     – Für „$n = 1$“ ist $a_1 \in \,]0,1[$, insbesondere also $0 < a_1 < 1$.
     – Für „$n \to n+1$“ ist $0 < a_n < 1$ und damit auch $0 < a_1^2 < 1$, mit den Monotoniegesetzen von Addition und Multiplikation also

$$\frac{0+2}{3} < \frac{a_n^2+2}{3} < \frac{1+2}{3},$$

     woraus sich $\frac{2}{3} < a_{n+1} < 1$, insbesondere also $0 < a_{n+1} < 1$, ergibt.
   - Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < 1$ gemäß a) und damit

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{a_n^2+2}{3} - a_n = \frac{(a_n^2+2) - 3\,a_n}{3} = \\ &= \frac{1}{3}\left(a_n^2 - 3\,a_n + 2\right) = \underbrace{\frac{1}{3}}_{>0} \cdot \underbrace{(a_n-1)}_{<0} \cdot \underbrace{(a_n-2)}_{<0} > 0, \end{aligned}$$

   also $a_n < a_{n+1}$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend und nach oben beschränkt, also konvergent; es sei $a = \lim_{n\to\infty} a_n$. Wegen $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $0 \leq a \leq 1$, und unter Verwendung der Rekursionsvorschrift erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n^2+2}{3} = \frac{a^2+2}{3},$$

woraus sich zunächst

$$3\,a = a^2 + 2, \qquad \text{also} \qquad a^2 - 3\,a + 2 = 0,$$

wegen

$$a^2 - 3\,a + 2 = (a-1)\cdot(a-2) \qquad \text{damit} \qquad a \in \{1,\,2\}$$

und wegen $a \leq 1$ schließlich $a = 1$ ergibt.

2. a) Es ist die alternierende Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$a_n = \frac{1}{\underbrace{n}_{\to+\infty} + \underbrace{\sqrt{n}}_{\to+\infty}} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zunächst eine Nullfolge. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt ferner $0 < n \leq n+1$, wegen der Monotonie der Quadratwurzel also $0 < \sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, mit dem Monotoniegesetz der Addition dann

$$0 < n + \sqrt{n} \leq (n+1) + \sqrt{n+1}$$

und somit

$$a_n = \frac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{(n+1)+\sqrt{n+1}} = a_{n+1};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch monoton fallend. Folglich ist die gegebene alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ nach dem Leibnizkriterium konvergent.

b) Es ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \qquad \text{mit} \qquad b_n = (-1)^n \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}+n^2} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei

$$|b_n| = \left|(-1)^n \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}+n^2}\right| = \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}+n^2} \leq \frac{n^{n-1}}{n^{n+1}} = \frac{n^{n-1}}{n^{n-1}\cdot n^2} = \frac{1}{n^2}.$$

Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und ist damit nach dem Majorantenkriterium selbst absolut konvergent.

c) In Abhängigkeit von $x \in \mathbb{R}_0^+$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \qquad \text{mit} \qquad c_n = \frac{(3-2\sqrt{x})^n}{n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

zu betrachten; wegen

$$\sqrt[n]{|c_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(3-2\sqrt{x})^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|3-2\sqrt{x}|^n}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|3-2\sqrt{x}|^n}}{\sqrt[n]{n}} =$$
$$= \frac{|3-2\sqrt{x}|}{\underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\to 1}} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{|3-2\sqrt{x}|}{1} = \left|3-2\sqrt{x}\right|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|3-2\sqrt{x}| < 1$ absolut konvergent, wegen

  $$\left|3-2\sqrt{x}\right| < 1 \iff -1 < 3-2\sqrt{x} < 1 \iff$$
  $$\iff -4 < -2\sqrt{x} < -2 \iff 2 > \sqrt{x} > 1 \iff 4 > x > 1$$

  also für alle $x \in \,]1,4[$, sowie
- für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ mit $|3-2\sqrt{x}| > 1$ divergiert, wegen

  $$\left|3-2\sqrt{x}\right| > 1 \iff \left(3-2\sqrt{x} < -1 \;\text{ oder }\; 3-2\sqrt{x} > 1\right) \iff$$
  $$\iff \left(2 < \sqrt{x} \;\text{ oder }\; 1 > \sqrt{x}\right) \iff \left(4 < x \;\text{ oder }\; 1 > x\right)$$

  also für alle $x \in [0,1[\,\cup\,]4,+\infty[$.

In den beiden verbleibenden Fällen $x \in \{1,4\}$ ist über das Wurzelkriterium keine Aussage möglich:

- für $x = 1$ ist

  $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3-2\sqrt{1}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  die harmonische Reihe und damit divergent, und
- für $x = 4$ ist

  $$\sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(3-2\sqrt{4}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  die alternierende harmonische Reihe und damit konvergent.

Insgesamt ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ genau dann konvergent, wenn $x \in \,]1,4]$ ist.

3. a)
- Die Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ mit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ heißt stetig im Punkt $a \in D$, wenn für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in D mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$ stets $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(a)$ gilt.
- Der Nullstellensatz besagt, daß es für eine stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $f(a) \cdot f(b) < 0$ (mindestens) ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $f(\xi) = 0$ gibt.

b) Die Lösungen der gegebenen Gleichung

$$(*) \qquad x^4 - e^x = 0$$

stimmen mit den Nullstellen der Funktion

$$\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = x^4 - e^x,$$

überein; dabei ist φ als Differenz einer Polynomfunktion und der Exponentialfunktion stetig, und wegen $\frac{1}{e} < 1 < e$ und $e^2 < 3^2 < 16$ gilt

$$\begin{array}{rcccccl} \varphi(-1) & = & (-1)^4 - e^{-1} & = & 1 - \frac{1}{e} & > & 0, \\ \varphi(0) & = & 0^4 - e^0 & = & 0 - 1 & < & 0, \\ \varphi(1) & = & 1^4 - e^1 & = & 1 - e & < & 0, \\ \varphi(2) & = & 2^4 - e^2 & = & 16 - e^2 & > & 0. \end{array}$$

Wir betrachten die beiden Einschränkungen $\varphi|_{[-1,0]}$ und $\varphi|_{[1,2]}$ der stetigen Funktion φ auf die abgeschlossenen Intervalle $[-1,0]$ und $[1,2]$ mit

$$\varphi(-1) \cdot \varphi(0) < 0 \qquad \text{und} \qquad \varphi(1) \cdot \varphi(2) < 0,$$

und nach dem Nullstellensatz existiert ein $\xi_1 \in \,]-1,0[$ mit $\varphi(\xi_1) = 0$ und ein $\xi_2 \in \,]1,2[$ mit $\varphi(\xi_2) = 0$. Damit ist $\xi_1 < 0$ eine negative Lösung und $\xi_2 > 0$ eine positive Lösung der Gleichung $(*)$.

c) Für $a < b$ werden die stetigen Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(a) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad f(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \,]a,b]$$

und

$$g(b) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad g(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a,b[$$

betrachtet; damit ist die Hilfsfunktion

$$h : [a,b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x),$$

als Differenz zweier stetiger Funktionen selbst stetig, und es gilt

$$h(a) = \underbrace{f(a)}_{=0} - g(a) = -\underbrace{g(a)}_{>0} < 0$$

sowie

$$h(b) = f(b) - \underbrace{g(b)}_{=0} = \underbrace{f(b)}_{>0} > 0,$$

also $h(a) \cdot h(b) < 0$, und nach dem Nullstellensatz existiert (mindestens) ein $\xi \in \,]a,b[$ mit $h(\xi) = 0$, also $f(\xi) - g(\xi) = 0$ bzw. $f(\xi) = g(\xi)$.

4. Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(e^x + 1\right).$$

und stützen uns auf die Eigenschaften von $\exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$; damit ist f als Komposition von ln (als äußerer Funktion) und der Summe von exp und einer konstanten Funktion (als innerer Funktion) insbesondere stetig.

a) Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt

- zunächst, da exp streng monoton wachsend ist, $e^{x_1} < e^{x_2}$,
- dann mit dem Monotoniegesetz der Addition $e^{x_1} + 1 < e^{x_2} + 1$, und
- schließlich, da ln streng monoton wachsend ist, $\ln(e^{x_1}+1) < \ln(e^{x_2}+1)$,

also $f(x_1) < f(x_2)$; damit ist f streng monoton wachsend, insbesondere also umkehrbar. Es gilt zum einen

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \ln\Bigg(\underbrace{\underbrace{e^x}_{\to 0} + 1}_{\to 1}\Bigg) \underset{\text{ln stetig}}{=} \ln 1 = 0$$

und wegen

$$f(x) - x = \ln\left(e^x + 1\right) - x = \ln\left(e^x + 1\right) - \ln e^x = \ln\frac{e^x + 1}{e^x} = \ln\left(1 + e^{-x}\right)$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ zum anderen

$$\lim_{x\to+\infty} \left(f(x) - x\right) = \ln\Bigg(\underbrace{1 + \underbrace{e^{-x}}_{\to 0}}_{\to 1}\Bigg) \underset{\text{ln stetig}}{=} \ln 1 = 0;$$

insbesondere gilt also

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \Bigg(\underbrace{(f(x) - x)}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to+\infty}\Bigg) = +\infty.$$

b) Wegen

$$f(x) = \ln\Bigg(\underbrace{\underbrace{e^x}_{>0} + 1}_{>1}\Bigg) > \ln 1 = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt zunächst $W_f \subseteq]0, +\infty[$; für „$\supseteq$“ sei $y \in]0, +\infty[$.

- Wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) \leq y$,
- und wegen $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) \geq y$;

damit existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [a, b] \subseteq \mathbb{R}$ mit $f(\xi) = y$, und folglich ist $y \in W_f$.

c) Die Umkehrfunktion $f^{-1} : D_{f^{-1}} \to \mathbb{R}$ von f besitzt den Definitionsbereich $D_{f^{-1}} = W_f = \,]0, +\infty[$. Für alle $y \in \,]0, +\infty[$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt dabei

$$f(x) = y \iff \ln\left(e^x + 1\right) = y \iff e^x + 1 = e^y \iff$$
$$\iff e^x = \underbrace{e^y - 1}_{> e^0 - 1 = 0} \iff x = \ln\left(e^y - 1\right);$$

damit ergibt sich

$$f^{-1}(y) = \ln\left(e^y - 1\right) \qquad \text{für alle} \qquad y \in \,]0, +\infty[\,.$$

Unter Verwendung der Ergebnisse von a) ergibt sich die folgende Skizze: