MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Klausur
22.02.2020

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

1. a)
   - Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiere man „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach oben beschränkt" und „$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend". (1)
   - Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiere man den Begriff „Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$". (1)
   - Für eine monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ formuliere man den „Hauptsatz über monotone Folgen". (1)

   b) Man betrachte die für einen beliebigen Startwert $a_1 \in]0,1[$ durch

   $$a_{n+1} = \frac{a_n^2 + 2}{3} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

   rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   - Man zeige, daß $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt. (1)
   - Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist. (1)
   - Man zeige, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme den Grenzwert. (1)

2. a) Man untersuche die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n + \sqrt{n}}$$

   auf Konvergenz. (2)

   b) Man zeige, daß die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n^{n-1}}{n^{n+1} + n^2}$$

   absolut konvergiert. (2)

   c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}_0^+$, für die die Reihe

   $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3 - 2\sqrt{x})^n}{n}$$

   konvergiert. (2)

3. a)
   - Sei $f : D \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit $\emptyset \neq D \subseteq \mathbb{R}$ sowie $a \in D$; man definiere den Begriff „f ist stetig im Punkt a“ unter Verwendung reeller Zahlenfolgen. (1)
   - Man formuliere den Nullstellensatz. (1)

   b) Man zeige, daß die Gleichung

$$x^4 - e^x = 0$$

   in $\mathbb{R}$ (mindestens) eine negative Lösung und (mindestens) eine positive Lösung besitzt. (2)

   c) Für $a < b$ seien $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ und $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit

$$f(a) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad f(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \,]a, b]$$

   und

$$g(b) = 0 \qquad \text{sowie} \qquad g(x) > 0 \quad \text{für alle} \quad x \in [a, b[\,.$$

   Man zeige, daß es (mindestens) ein $\xi \in \,]a, b[$ mit $f(\xi) = g(\xi)$ gibt. (2)

4. Man betrachte die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \ln\left(e^x + 1\right).$$

   a) Man zeige anhand der Definition, daß f streng monoton wachsend ist, und bestätige die Grenzwerte

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} \left(f(x) - x\right) = 0. \qquad (2)$$

   b) Man zeige unter Verwendung des Zwischenwertsatzes, daß f den Wertebereich $W_f = \,]0, +\infty[$ besitzt. (2)

   c) Man berechne die Abbildungsvorschrift der Umkehrfunktion f^{-1} von f und skizziere die Graphen G_f und $G_{f^{-1}}$. (2)