Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

53. a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt
$$f(x) = \frac{e^{x+1}}{e^x + 1} = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1};$$
aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion exp ergibt sich, daß auch die Funktionen
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = e^x \cdot e,$$
und
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = e^x + 1,$$
und damit ihr Quotient $f = \frac{f_1}{f_2} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig sind. Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund des Monotonieverhaltens der Exponentialfunktion exp zunächst $e^{x_1} < e^{x_2}$ und damit
$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{e^{x_1}\, e}{e^{x_1} + 1} - \frac{e^{x_2}\, e}{e^{x_2} + 1} = \frac{e^{x_1}\, e\,(e^{x_2} + 1) - e^{x_2}\, e\,(e^{x_1} + 1)}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)} = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}\,(e^{x_1}\,(e^{x_2} + 1) - e^{x_2}\,(e^{x_1} + 1)) = \\ &= \frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}\,((e^{x_1}\, e^{x_2} + e^{x_1}) - (e^{x_2}\, e^{x_1} + e^{x_2})) = \\ &= \underbrace{\frac{e}{(e^{x_1} + 1)\,(e^{x_2} + 1)}}_{>0} \cdot \underbrace{(e^{x_1} - e^{x_2})}_{<0} < 0, \end{aligned}$$
also $f(x_1) < f(x_2)$; damit ist f streng monoton wachsend.

b) Wegen
$$\lim_{x \to -\infty} e^x = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$
ergibt sich
$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} \frac{0 \cdot e}{0 + 1} = 0$$
sowie
$$f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = \frac{e}{1 + \frac{1}{e^x}} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} \frac{e}{1 + 0} = e.$$
Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt ferner $0 < e^x \cdot e < (e^x + 1) \cdot e$ und damit
$$0 < f(x) = \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} < e,$$

woraus sich zunächst $W_f \subseteq\ ]0, e[$ ergibt; zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei nun $y \in\ ]0, e[$. Wegen $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$ gibt es ein $a < 0$ mit $f(a) < y$, und wegen $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = e$ gibt es ein $b > 0$ mit $f(b) > y$; nach dem Zwischenwertsatz existiert also ein $\xi \in [a, b]$ mit $f(\xi) = y$. Insgesamt gilt also $W_f = \ ]0, e[$.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist streng monoton wachsend und damit insbesondere umkehrbar. Zur Berechnung der Umkehrfunktion $f^{-1} :]0, e[\to \mathbb{R}$ betrachten wir ein $y \in\ ]0, e[$; dabei gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y \iff \frac{e^x \cdot e}{e^x + 1} = y \iff e^x \cdot e = y\,(e^x + 1) \iff \\ \iff e \cdot e^x = y \cdot e^x + y \iff (e - y) \cdot e^x = y \underset{e-y \neq 0}{\iff} \\ \iff e^x = \frac{y}{e - y} \underset{\frac{y}{e-y} > 0}{\iff} x = \ln \frac{y}{e - y}, \end{aligned}$$

so daß sich für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} :]0, e[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \ln \frac{y}{e - y},$$

ergibt.

54. a) Das maximale Definitionsgebiet D von f umfaßt genau diejenigen $x \in \mathbb{R}$, für die beide auftretenden Argumente des natürlichen Logarithmus positiv sind. Wegen

		-4		2	
$x + 4$	$-$	0	$+$	$\vert$	$+$
$x - 2$	$-$	$\vert$	$-$	0	$+$
$\frac{x+4}{x-2}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

ist $D_1 = \ ]-\infty, -4[\cup]2, \infty[$, und wegen

		-1		3	
$x - 3$	$-$	0	$-$	$\vert$	$+$
$x + 1$	$-$	$\vert$	$+$	0	$+$
$\frac{x-3}{x+1}$	$+$	0	$-$	$\vert$	$+$

ist $D_2 = \ ]-\infty, -1[\cup]3, \infty[$; folglich ergibt sich

$$D = D_1 \cap D_2 = \ ]-\infty, -4[\cup]3, \infty[= \mathbb{R} \setminus [-4, 3]\,.$$

b) Für alle $x \neq 0$ ist

$$\frac{x + 4}{x - 2} = \frac{1 + \frac{4}{x}}{1 - \frac{2}{x}} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1 + 0}{1 - 0} = 1$$

sowie

$$\frac{x - 3}{x + 1} = \frac{1 - \frac{3}{x}}{1 + \frac{1}{x}} \underset{x \to \pm\infty}{\longrightarrow} \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1;$$

mit der Stetigkeit des natürlichen Logarithmus ln ergibt sich daraus

$$\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \lim_{x\to\pm\infty}\left(\ln\frac{x+4}{x-2} - \ln\frac{x-3}{x+1} - 2\,\ln 3\right) =$$
$$= \ln 1 - \ln 1 - 2\,\ln 3 = 0 - 0 - 2\ln 3 = -2\,\ln 3.$$

Des weiteren ergibt sich

$$\lim_{x\to -4-} f(x) = \lim_{x\to -4-}\left(\ln\underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\longrightarrow 0+} - \ln\underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\longrightarrow \frac{7}{3}} - 2\,\ln 3\right) = -\infty$$

sowie

$$\lim_{x\to 3+} f(x) = \lim_{x\to 3+}\left(\ln\underbrace{\frac{x+4}{x-2}}_{\longrightarrow 7} - \ln\underbrace{\frac{x-3}{x+1}}_{\longrightarrow 0+} - 2\,\ln 3\right) = +\infty.$$

c) Für alle $x \in D$ mit $f(x) = 0$ gilt

$$\ln\frac{x+4}{x-2} - \ln\frac{x-3}{x+1} = 2\,\ln 3 \implies \ln\frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = \ln 9 \implies$$
$$\frac{(x+4)\,(x+1)}{(x-2)\,(x-3)} = 9 \implies x^2 + 5\,x + 4 = 9\left(x^2 - 5\,x + 6\right) \implies$$
$$8\,x^2 - 50\,x + 50 = 0 \implies 4\,x^2 - 25\,x + 25 = 0 \implies$$
$$x = \frac{1}{2\cdot 4}\left(-(-25) \pm \sqrt{(-25)^2 - 4\cdot 4\cdot 25}\right) = \frac{25 \pm \sqrt{225}}{8} = \frac{25 \pm 15}{8}$$

Damit ist $x = 5$ oder $x = \frac{5}{4}$, und wegen $\frac{5}{4} \notin D$ gilt $x = 5$. Wegen

$$f(5) = \ln\frac{5+4}{5-2} - \ln\frac{5-3}{5+1} - 2\,\ln 3 = \ln 3 - \underbrace{\ln\frac{1}{3}}_{=-\ln 3} - 2\,\ln 3 = 0$$

ist $x = 5$ die einzige Nullstelle von f.

55. a) Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n$ besitzt die Gestalt der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $q = 1 - \ln x$. Diese konvergiert genau dann, wenn $|q| < 1$ gilt, wegen

$$|1 - \ln x| < 1 \iff -1 < 1 - \ln x < 1 \iff$$
$$\iff -2 < -\ln x < 0 \iff 0 < \ln x < 2 \iff 1 < x < e^2$$

also genau für $x \in \,]1, e^2[$, und in diesem Fall gilt für die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1 - \ln x)^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} = \frac{1}{1 - (1 - \ln x)} = \frac{1}{\ln x}.$$

b) Zu betrachten ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $a_n = \frac{(\tan x)^n}{n}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\left|\frac{(\tan x)^n}{n}\right|} = \sqrt[n]{\frac{|\tan x|^n}{n}} = \frac{|\tan x|}{\sqrt[n]{n}} \xrightarrow[n\to\infty]{} |\tan x|$$

ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ nach dem Wurzelkriterium

- für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $|\tan x| < 1$ (absolut) konvergent, wegen

$$|\tan x| < 1 \iff -1 < \tan x < 1 \iff -\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{4}$$

  also für $x \in \left]-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$, sowie
- für alle $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ mit $|\tan x| > 1$ divergent, wegen

$$|\tan x| > 1 \iff \tan x < -1 \text{ oder } 1 < \tan x \iff$$
$$\iff -\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{4} \text{ oder } \frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2}$$

  also für $x \in \left]-\frac{\pi}{2}, -\frac{\pi}{4}\right[\cup \left]\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right[$.

Es sind noch die Fälle $x = \pm\frac{\pi}{4}$ zu untersuchen:

- Für $x = \frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tan \frac{\pi}{4}\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

  als harmonische Reihe divergent, und
- für $x = -\frac{\pi}{4}$ ist die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\tan x)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)^n}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n}$$

  als alternierende harmonische Reihe konvergent.

Insgesamt konvergiert also die gegebene Reihe genau für alle $x \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right[$.

56. - Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ergibt sich aus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \text{insbesondere} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(n \sin\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1,$$

so daß die Folge $\left(n \sin\frac{1}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, mithin auch beschränkt ist; es gibt also ein $M > 0$, so daß für alle $n \in \mathbb{N}$ zunächst $\left|n \sin\frac{1}{n}\right| \le M$ und dann

$$\left|\frac{1}{n}\sin\frac{1}{n}\right| = \left|\frac{1}{n^2}\cdot n\sin\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n^2}\cdot\underbrace{\left|n\sin\frac{1}{n}\right|}_{\le M} \le \frac{M}{n^2}$$

gilt. Damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{1}{n}$ die konvergente Majorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{M}{n^2}$ und ist folglich nach dem Majorantenkriterium selbst konvergent.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < \frac{1}{n} \leq 1 < \frac{\pi}{2}$; da der Cosinus auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ streng monoton fallend ist, folgt daraus $1 = \cos 0 > \cos \frac{1}{n} \geq \cos 1 > \cos \frac{\pi}{2} = 0$ und damit

$$\frac{1}{n} \cos \frac{1}{n} \geq \frac{1}{n} \cos 1.$$

Mit der harmonischen Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ ist auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1}{n}$ divergent; damit besitzt die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} \cos \frac{1}{n}$ die divergente Minorante $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos 1}{n}$ und ist folglich nach dem Minorantenkriterium selbst divergent.

- Man betrachte die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = \tan \frac{1}{n}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt zunächst $0 < \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} \leq 1$; da der Tangens auf $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$ monoton wachsend ist, folgt daraus

$$a_{n+1} = \tan \frac{1}{n+1} \leq \tan \frac{1}{n} = a_n$$

weswegen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Ferner gilt $\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} = 0$, wodurch sich wegen der Stetigkeit von tan (im Punkte $a = 0$)

$$\lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} \tan \frac{1}{n} = \tan 0 = 0$$

ergibt; damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge. Somit konvergiert die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \tan \frac{1}{n}$ nach den Leibnizschen Konvergenzkriterium.