MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

49. a) Wir zeigen die Stetigkeit von f in jedem Punkt $a \in \mathbb{R}$:

- Die Einschränkung $f|_{]-\infty,-1[}$ von f auf $]-\infty,-1[$ ist als gebrochenrationale Funktion
$$x \mapsto \frac{2x^3}{x^2+1}$$
stetig; folglich ist f in allen Punkten $a \in \,]-\infty,-1[$ stetig.
- Die Einschränkung $f|_{]-1,+\infty[}$ von f auf $]-1,+\infty[$ ist als quadratische Funktion
$$x \mapsto x^2 - 2\,x - 4$$
stetig; folglich ist f in allen Punkten $a \in \,]-1,+\infty[$ stetig.
- Für $a = -1$ gilt
$$\lim_{x\to -1-} f(x) = \lim_{x\to 1-} \frac{2\,x^3}{x^2+1} = \frac{2\,(-1)^3}{(-1)^2+1} = \frac{-2}{1+1} = -1;$$
und
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = \lim_{x\to -1+} (x^2 - 2\,x - 4) = \\ = (-1)^2 - 2\,(-1) - 4 = 1 + 2 - 4 = -1$$
damit ist f wegen
$$\lim_{x\to -1+} f(x) = f(-1) = \lim_{x\to -1-} f(x)$$
im Punkt $a = -1$ stetig.

Insgesamt ist also die Funktion f stetig.

b) Für alle $x > 0$ ist
$$f(x) = \underbrace{x^2}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{2}{x} - \frac{4}{x^2}\right)}_{\xrightarrow[x\to+\infty]{} 1} \xrightarrow[x\to+\infty]{} +\infty,$$
und für alle $x < -1$ ist
$$f(x) = \frac{2\,x^3}{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)} = \underbrace{2\,x}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty} \cdot \underbrace{\frac{1}{1+\frac{1}{x^2}}}_{\xrightarrow[x\to-\infty]{} 1} \xrightarrow[x\to-\infty]{} -\infty.$$

Sei nun $y \in \mathbb{R}$ beliebig;

- wegen $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = +\infty$ gibt es ein $d > 0$ mit $f(d) > y$, und
- wegen $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$ gibt es ein $c < 0$ mit $f(c) < y$.

Aufgrund der Stetigkeit von f existiert also nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi \in [c, d]$ mit $f(\xi) = y$, weswegen $y \in W_f$ gilt. Folglich ergibt sich $W_f = \mathbb{R}$.

c) Für alle $x \geq 1$ gilt

$$f(x) = x^2 - 2\,x - 4 = (x-1)^2 - 5;$$

damit ist der Graph G_f im Bereich $[1, +\infty[$ der rechte Ast einer nach oben geöffneten Parabel mit dem Scheitel $(1, -5)$, und demnach ist die Einschränkung $g = f|_{[1,+\infty[}$ von f auf das Intervall $[1, +\infty[$ streng monoton steigend, insbesondere also umkehrbar; ferner ist $W_g = [-5, +\infty[$.
Zur Berechnung der Umkehrfunktion sei $y \in [-5, +\infty[$; dabei gilt

$$g(x) = y \iff (x-1)^2 - 5 = y \iff (x-1)^2 = y + 5 \iff$$
$$\underset{x-1>0}{\iff} x - 1 = \sqrt{y+5} \iff x = 1 + \sqrt{y+5}.$$

Damit ist

$$g^{-1} : [-5, +\infty[\to \mathbb{R}, \quad g^{-1}(y) = 1 + \sqrt{y+5}$$

die Umkehrfunktion der Einschränkung $g = f|_{[1,+\infty[}$ von f auf $[1, +\infty[$.

50. a) Die Stetigkeit der gebrochenrationalen Funktion

$$f_1 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = \frac{x}{x+1},$$

und der Wurzelfunktion

$$f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = \sqrt{x},$$

ergibt die Stetigkeit der Komposition

$$f = f_1 \circ f_2 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1}.$$

Für alle $x_1,\, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt aufgrund der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{x_1} < \sqrt{x_2}$ und damit

$$\begin{aligned} f(x_1) - f(x_2) &= \frac{\sqrt{x_1}}{\sqrt{x_1}+1} - \frac{\sqrt{x_2}}{\sqrt{x_2}+1} = \\ &= \frac{\sqrt{x_1}\left(\sqrt{x_2}+1\right) - \sqrt{x_2}\left(\sqrt{x_1}+1\right)}{\left(\sqrt{x_1}+1\right)\left(\sqrt{x_2}+1\right)} = \\ &= \underbrace{\left(\sqrt{x_1} - \sqrt{x_2}\right)}_{<0} \cdot \underbrace{\frac{1}{\left(\sqrt{x_1}+1\right)\left(\sqrt{x_2}+1\right)}}_{>0} < 0, \end{aligned}$$

also $f(x_1) < f(x_2)$; folglich ist die Funktion f streng monoton wachsend.

b) Für alle $x \in \mathbb{R}_0^+$ gilt $0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{x} + 1$ und damit

$$0 \leq f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} < 1,$$

woraus sich zunächst $W_f \subseteq [0,1[$ ergibt; zum Nachweis von „$\supseteq$“ sei $y \in [0,1[$. Mit $a = 0$ gilt $f(a) = 0 \leq y$, und wegen

$$f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} \underset{x>0}{=} \frac{1}{1+\frac{1}{\sqrt{x}}} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1+0} = 1$$

gibt es ein $b > 0$ mit $y \leq f(b)$; nach dem Zwischenwertsatz existiert nun ein $\xi \in [0,b]$ mit $f(\xi) = y$. Insgesamt gilt also $W_f = [0,1[$.

c) Zur Berechnung der Umkehrfunktion $f^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}$ betrachten wir ein $y \in [0,1[$; dabei gilt

$$\begin{aligned} f(x) = y \iff \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+1} = y \iff \sqrt{x} = y\left(\sqrt{x}+1\right) \iff \\ \iff \sqrt{x} = y\,\sqrt{x} + y \iff \sqrt{x} - y\,\sqrt{x} = y \iff \\ \iff (1-y)\;\sqrt{x} = y \underset{1-y\neq 0}{\iff} \sqrt{x} = \frac{y}{1-y} \underset{\frac{y}{1-y}\geq 0}{\iff} x = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2, \end{aligned}$$

so daß sich für die Umkehrfunktion

$$f^{-1} : [0,1[\to \mathbb{R}, \quad f^{-1}(y) = \left(\frac{y}{1-y}\right)^2,$$

ergibt. Die Funktion f^{-1} ist als Umkehrfunktion einer streng monoton wachsenden Funktion auf einem Intervall (bzw. als gebrochenrationale Funktion) stetig.

51. a) Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt zunächst

$$f(x_1) \leq f(x_2) \qquad \text{und} \qquad g(x_1) \leq g(x_2),$$

wodurch sich mit dem Monotoniegesetz der Addition

$$\begin{aligned} (f+g)(x_1) = f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_1) \leq \\ \leq f(x_2) + g(x_2) = (f+g)(x_2) \end{aligned}$$

ergibt; damit ist $f + g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton wachsend.

b) Wir wählen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = x, \qquad \text{und} \qquad g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x;$$

damit sind f und g (sogar streng) monoton wachsend, aber die Funktion

$$f \cdot g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = x^2,$$

ist weder monoton wachsend noch monoton fallend. (Eine entsprechende Argumentation wie in a) mißlingt, da für die Anwendung des Monotoniegesetzes der Multiplikation eine Beschränkung auf positive Funktionswerte nötig wäre.)

c) Für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ mit $x_1 < x_2$ gilt $f(x_1) \leq f(x_2)$ und damit

$$(-f)(x_1) = -f(x_1) \geq -f(x_2) = (-f)(x_2);$$

damit ist $-f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ monoton fallend.

d) Wir wählen

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x, & \text{für } x < 0, \\ x+1, & \text{für } x \geq 0. \end{cases}$$

Damit ist f nullstellenfrei und (sogar streng) monoton wachsend. Aber für $x_1 = -1$ und $x_2 = 1$ gilt $x_1 < x_2$ und

$$\frac{1}{f}(x_1) = \frac{1}{f(x_1)} = -1 < \frac{1}{2} = \frac{1}{f(x_2)} = \frac{1}{f}(x_2);$$

damit ist $\frac{1}{f}$ nicht monoton fallend.

Es sei an dieser Stelle angemerkt, daß die Aussage unter der zusätzlichen Voraussetzung der Stetigkeit von f richtig ist. In diesem Fall gilt nämlich aufgrund des Nullstellensatzes entweder $f(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ oder aber $f(x) < 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$; dementsprechend gilt für alle $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ auf jeden Fall $f(x_1) \cdot f(x_2) > 0$, so daß aus $x_1 < x_2$ zunächst $f(x_1) \leq f(x_2)$ und damit

$$\frac{1}{f}(x_1) - \frac{1}{f}(x_2) = \frac{1}{f(x_1)} - \frac{1}{f(x_2)} = \big(\underbrace{f(x_2) - f(x_1)}_{\geq 0}\big) \cdot \underbrace{\frac{1}{f(x_1) \cdot f(x_2)}}_{>0} \geq 0,$$

also

$$\frac{1}{f}(x_1) \geq \frac{1}{f}(x_2),$$

folgt. Damit ist die Funktion $\frac{1}{f}$ monoton fallend.

52. Wir betrachten die (als Differenz der beiden als stetig vorausgesetzten Funktionen f und g selbst) stetige Hilfsfunktion

$$h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x).$$

- Für alle $x < 0$ gilt, da f monoton wächst, schon $f(x) \leq f(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \leq f(0) - \underbrace{g(x)}_{\to +\infty} \underset{x \to -\infty}{\longrightarrow} -\infty;$$

  insbesondere gilt $\lim\limits_{x \to -\infty} h(x) = -\infty$, und es gibt ein $a < 0$ mit $h(a) < 0$.

- Für alle $x > 0$ gilt, da g monoton fällt, schon $g(x) \leq g(0)$, und damit

$$h(x) = f(x) - g(x) \geq \underbrace{f(x)}_{\to +\infty} - g(0) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty;$$

  insbesondere gilt $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$, und es gibt ein $b > 0$ mit $h(b) > 0$.

Damit ist die Einschränkung von h auf das abgeschlossene Intervall $[a, b] \subseteq \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $h(a) \cdot h(b) < 0$; folglich gibt es nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in [a, b]$ mit

$$h(\xi) = 0, \quad \text{also} \quad f(\xi) - g(\xi) = 0 \quad \text{bzw.} \quad f(\xi) = g(\xi).$$

Folglich ist $(\xi, f(\xi)) = (\xi, g(\xi))$ ein gemeinsamer Punkt auf den Graphen G_f und G_g.