MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

45. a) Die Funktion f ist als Summe, Produkt und Komposition stetiger Funktionen selbst stetig; genauer gilt:

- Zunächst sind die Polynomfunktionen
$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$
und
$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^3 + x + 1,$$
und
$$f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = x^4 + 1,$$
sowie die Betragsfunktion
$$f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = |x|,$$
und die Wurzelfunktion
$$f_5 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f_5(x) = \sqrt{x},$$
stetig.
- Damit sind die Kompositionen
$$f_6 = f_4 \circ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_6(x) = f_4(f_2(x)) = |x^3 + x + 1|,$$
und
$$f_7 = f_5 \circ f_3 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_7(x) = f_5(f_3(x)) = \sqrt{x^4 + 1},$$
stetig.
- Damit ist nun das Produkt
$$f_8 = f_1 \cdot f_6 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_8(x) = f_1(x) \cdot f_6(x) = x \cdot |x^3 + x + 1|,$$
stetig.
- Damit ist schließlich die Summe
$$f = f_8 + f_7 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f_8(x) + f_7(x) = x \cdot |x^3 + x + 1| + \sqrt{x^4 + 1}$$
stetig.

b) Wegen

$$f(-2) = (-2) \cdot |(-2)^3 + (-2) + 1| + \sqrt{(-2)^4 + 1} = -18 + \sqrt{17} < 0$$

und

$$f(-1) = (-1)|(-1)^3 + (-1) + 1| + \sqrt{(-1)^4 + 1} = -1 + \sqrt{2} > 0$$

besitzt die gemäß a) stetige Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ nach dem Nullstellensatz (mindestens) eine Nullstelle im Intervall $]-2, -1[$ der Intervallänge 1.

c) Wegen

$$f(-\tfrac{3}{2}) = (-\tfrac{3}{2}) \cdot |(-\tfrac{3}{2})^3 + (-\tfrac{3}{2}) + 1| + \sqrt{(-\tfrac{3}{2})^4 + 1} = -\tfrac{93}{16} + \tfrac{1}{4}\sqrt{97} < 0$$

muß (wiederum nach dem Nullstellensatz) im Intervall $\left]-\frac{3}{2}, -1\right[$ der Länge $\frac{1}{2}$ eine Nullstelle von f liegen.

46. a) Wir betrachten die Funktion

$$h : [a, b] \to \mathbb{R}, \quad h(x) = f(x) - g(x);$$

damit ist $h = f - g$ als Differenz stetiger Funktionen stetig, und wegen

$$h(a) = f(a) - g(a) < 0 \quad \text{und} \quad h(b) = f(b) - g(b) > 0$$

existiert nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in]a, b[$ mit $h(\xi) = 0$; damit gilt aber $\eta = f(\xi) = g(\xi)$, und $S = (\xi, \eta)$ ein Schnittpunkt der Graphen G_f und G_g.

b) Die Funktionen

$$f : [-1, 1]\,, \quad f(x) = 2\,x + 1, \quad \text{und} \quad g : [-1, 1]\,, \quad g(x) = x^2,$$

sind als Polynomfunktionen insbesondere stetig, und es gilt

$$f(-1) = -1 < 1 = g(-1) \quad \text{sowie} \quad f(1) = 3 > 1 = g(1).$$

Für $\xi \in]-1, 1[$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\xi) = g(\xi) \iff 2\,\xi + 1 = \xi^2 \iff 2 = \xi^2 - 2\,\xi + 1 \iff \\ \iff (\xi - 1)^2 = 2 \underset{\xi - 1 < 0}{\iff} \xi - 1 = -\sqrt{2} \iff \xi = 1 - \sqrt{2} \end{aligned}$$

Wegen $\eta = f(\xi) = 2\,\xi + 1 = 3 - 2\sqrt{2}$ ist $\left(1 - \sqrt{2},\ 3 - 2\sqrt{2}\right)$ der einzige Schnittpunkt der beiden Graphen G_f und G_g.

c) Aus der Stetigkeit der linearen Funktion

$$f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_1(x) = x,$$

und der Polynomfunktion

$$f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_2(x) = x^4 + 1,$$

sowie der Wurzelfunktion

$$f_3 : \mathbb{R}_0^+ \to \mathbb{R}, \quad f_3(x) = \sqrt{x},$$

ergibt sich die Stetigkeit der Komposition

$$f_4 = f_3 \circ f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_4(x) = f_3(f_2(x)) = \sqrt{x^4 + 1},$$

sowie der Differenzfunktion

$$f = f_1 - f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = f_1(x) - f_4(x) = x - \sqrt{x^4 + 1};$$

des weiteren ist die quadratische Funktion

$$g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad g(x) = x^2 - 2,$$

stetig.

- Wegen
$$f(-1) = -1 - \sqrt{2} < -1 = g(-1) \quad \text{und} \quad f(0) = -1 > -2 = g(0)$$
besitzen G_f und G_g gemäß a) in $]-1, 0[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.
- Wegen
$$f(1) = 1 - \sqrt{2} > -1 = g(1) \quad \text{und} \quad f(2) = 2 - \sqrt{17} < 2 = g(2)$$
besitzen G_f und G_g analog zu a) in $]1, 2[$ (mindestens) einen Schnittpunkt.

Damit besitzen die beiden Graphen G_f und G_g mindestens zwei Schnittpunkte.

47. Die Lösungen der zu betrachtenden Gleichung

$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$

entsprechen genau den Nullstellen der Funktion

$$f : \mathbb{R} \setminus \{a,\, b,\, c\} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c};$$

diese ist zunächst als gebrochenrationale Funktion stetig. Wegen

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{x-a}_{\to +\infty}} + \frac{2}{\underbrace{x-b}_{\to \frac{2}{a-b}}} + \frac{3}{\underbrace{x-c}_{\to \frac{3}{a-c}}} \quad \xrightarrow[x \to a+]{} \quad +\infty$$

gibt es ein $\alpha \in \,]a, b[$ mit $f(\alpha) > 0$, und wegen

$$f(x) = \frac{1}{\underbrace{x-a}_{\to \frac{1}{b-a}}} + \frac{2}{\underbrace{x-b}_{\to -\infty}} + \frac{3}{\underbrace{x-c}_{\to \frac{3}{b-c}}} \quad \xrightarrow[x \to b-]{} \quad -\infty$$

gibt es ein $\beta \in \,]\alpha, b[$ mit $f(\beta) < 0$; damit existiert aber nach dem Nullstellensatz ein $\xi \in \,]\alpha, \beta[\, \subseteq \,]a, b[$ mit $f(\xi) = 0$. Die entsprechende Argumentation liefert dann auch ein $\zeta \in \,]b, c[$ mit $f(\zeta) = 0$.

48. a) Wir betrachten eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

Die Funktion f ist nach Voraussetzung stetig, und das Definitionsgebiet $D_f = [-1, 1]$ ist ein abgeschlossenes Intervall. Damit besitzt f nach dem Satz von Weierstraß ein globales Minimum $p \in [-1, 1]$ und ein globales Maximum $q \in [-1, 1]$, und es gilt $f(p) \leq f(x) \leq f(q)$ für alle $x \in [-1, 1]$. Es ist $p \in [-1, 1]$ und damit nach Voraussetzung $f(p) > 0$; wir wählen $\varepsilon = f(p) > 0$ und erhalten damit

$$f(x) \geq f(p) = \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]\,.$$

b) Wir geben jeweils ein geeignetes Gegenbeispiel an.

- Die Funktion

$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} |x|\,, & \text{für } x \neq 0, \\ 1, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

ist wegen

$$\lim_{x\to 0} f(x) \underset{x\neq 0}{=} \lim_{x\to 0} |x| \underset{|\cdot|\ \text{stetig}}{=} |0| = 0 \neq 1 = f(0)$$

an der Stelle $a = 0$ unstetig, und es gilt

$$f(x) = \begin{cases} |x| > 0, & \text{für } x \neq 0, \\ 1 > 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

insgesamt also $f(x) > 0$ für alle $x \in [-1, 1]$. Für jedes $\varepsilon > 0$ ist aber

$$x = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2}, 1\right\} \in \left]0, 1\right]\,, \quad \text{insbesondere also} \quad x \in [-1, 1]\,,$$

mit

$$f(x) = |x| = x \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$

- Die Funktion

$$f : \left]-1, 1\right[\to \mathbb{R}, \quad f(x) = x + 1,$$

ist (als lineare Funktion) stetig, und es gilt

$$f(x) = x + 1 \underset{x>-1}{>} (-1) + 1 = 0 \qquad \text{für alle} \quad x \in \left]-1, 1\right[\,.$$

Für jedes $\varepsilon > 0$ ist aber

$$x = \min\left\{\frac{\varepsilon}{2} - 1, 0\right\} \in \left]-1, 0\right]\,, \quad \text{insbesondere also} \quad x \in \left]-1, 1\right[\,,$$

mit

$$f(x) = x + 1 \leq \left(\frac{\varepsilon}{2} - 1\right) + 1 = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon.$$