MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 8
09.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

29. a)

- Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ sei konvergent; da aber die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergent ist, ist damit auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}((a_n+b_n)-b_n)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)$ divergent.
  Entsprechend schließt man auf die Divergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n-b_n)$.
- Wir nehmen zum Widerspruch an, die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ sei konvergent; wegen $\lambda \neq 0$ ist $\frac{1}{\lambda} \in \mathbb{R}$, und damit ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda}\cdot(\lambda \cdot a_n)\right)$, also die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, im Widerspruch zur Voraussetzung. Damit ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda \cdot a_n)$ divergent.

b)

- Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ ist konvergent und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ divergent; nach a) divergiert damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^2}-\frac{1}{n}\right)$.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^6} = \frac{n^4+2\,n^2+1}{n^6} = \frac{1}{n^2}+\frac{2}{n^4}+\frac{1}{n^6};$$

  da nun die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ und $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^6}$ konvergieren und gemäß

Vorlesung die Summen

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90} \quad \text{und} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}$$

besitzen, ist auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^6}$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^6} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + 2 \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^2}{6} + \frac{\pi^4}{45} + \frac{\pi^6}{945}.$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{(n^2+1)^2}{n^5} = \frac{n^4 + 2\,n^2 + 1}{n^5} = \frac{1}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{1}{n^5};$$

da die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert und die Reihen $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3}$ und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^5}$ konvergieren, ist nach a) auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n^2+1)^2}{n^5}$ divergent.

30. Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n\,\sqrt{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ mit

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n\,\sqrt{n}}{(n+1)\,\sqrt{n+1}} = \underbrace{\frac{n}{n+1}}_{\leq 1} \cdot \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}}_{\leq 1} \leq 1, \qquad \text{also} \quad a_{n+1} \leq a_n,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist. Die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m\,\sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(\sqrt{2}\right)^m} = \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m.$$

hat die Gestalt der geometrischen Reihe $\displaystyle\sum_{m=0}^{\infty} q^m$ mit $q = \frac{1}{\sqrt{2}}$; wegen $|q| < 1$ konvergiert die verdichtete Reihe und damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt{n}}$. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{mit} \qquad a_n = \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n}} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 0$ mit

$$\begin{aligned}
\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}\right)^{n(n+1)} &= \left(\frac{(n+1)\,\sqrt[n+1]{n+1}}{n\,\sqrt[n]{n}}\right)^{n(n+1)} = \frac{(n+1)^{n(n+1)}\,(\sqrt[n+1]{n+1})^{n(n+1)}}{n^{n(n+1)}\,(\sqrt[n]{n})^{n(n+1)}} \\
&= \frac{(n+1)^{n(n+1)}\,(n+1)^n}{n^{n(n+1)}\,n^{n+1}} = \frac{(n+1)^{n(n+2)}}{n^{n(n+2)}\cdot n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n(n+2)}\cdot\frac{1}{n} \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n(n+2)}\cdot\frac{1}{n} \underset{(*)}{\geq} \left(1+\frac{n(n+2)}{n}\right)\cdot\frac{1}{n} = \frac{n+3}{n} \geq 1
\end{aligned}$$

und damit auch

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} \geq 1, \qquad \text{also} \qquad a_{n+1} \leq a_n,$$

so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend ist, wobei für $(*)$ die Bernoullische Ungleichung eingeht. Für die (dazu) verdichtete Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} 2^m\, a_{2^m} = \sum_{m=0}^{\infty} 2^m \cdot \frac{1}{2^m\,\sqrt[2^m]{2^m}} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}}.$$

gilt wegen

$$\sqrt[n]{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1 \qquad \text{insbesondere} \qquad \frac{1}{\sqrt[2^m]{2^m}} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1} = 1,$$

so daß die verdichtete Reihe damit nach dem Cauchyschen Verdichtungskriterium auch die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\,\sqrt[n]{n}}$ divergiert.

31. Wir betrachten zuerst die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$$

mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

  $$0 \leq a_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0;$$

  damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gemäß dem Schrankenlemma eine Nullfolge.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $n \leq n+1$, wegen der Monotonie der Quadratwurzel $\sqrt{n} \leq \sqrt{n+1}$, zusammen also $n+\sqrt{n} \leq (n+1)+\sqrt{n+1}$, erneut wegen der Monotonie der Quadratwurzel also $\sqrt{n+\sqrt{n}} \leq \sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}$, und demnach insgesamt

  $$a_n = \frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}} \geq \frac{1}{\sqrt{n+1+\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+1}} = a_{n+1};$$

  damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.

Insgesamt ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende Nullfolge, und daher konvergiert die alternierende Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ nach dem Leibnizkriterium. Wir betrachten nun die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \cdot a_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$$

mit $a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Wegen

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}} &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}-\sqrt{n}\right)\cdot\left(\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}\right)} = \\
&= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{n+\sqrt{n}-n} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}+\sqrt{n}}{\sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1 = \\
&= \sqrt{\frac{n+\sqrt{n}}{n}} + 1 = \sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \sqrt{1+0}+1 = 2
\end{aligned}$$

ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und damit auch $((-1)^n a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Nullfolge, und daher divergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$.

32. Für die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ positiver reeller Zahlen werden die beiden Reihen

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} b_n \quad \text{mit} \quad b_n = \frac{a_n}{1+a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachtet; es bezeichne $s_n = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ bzw. $t_n = \sum\limits_{k=1}^{n} b_k$ die n–te Partialsumme. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt dabei wegen

$$0 < a_n < 1 + a_n \qquad \text{dann} \qquad 0 < b_n = \frac{a_n}{1+a_n} < 1$$

mit

$$\begin{aligned}
b_n = \frac{a_n}{1+a_n} &\iff (1+a_n)\, b_n = a_n \iff b_n + a_n b_n = a_n \iff \\
&\iff b_n = a_n - a_n b_n \iff b_n = a_n\,(1-b_n) \iff a_n = \frac{b_n}{1-b_n}.
\end{aligned}$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ihrer Glieder eine Nullfolge; damit ergibt sich aber auch

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{1-b_n} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}{1-\lim\limits_{n\to\infty} b_n} = \frac{0}{1-0} = 0.$$

Somit ist auch die Folge $(1 + a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, insbesondere nach oben beschränkt, es gibt also eine Schranke $K_1 \in \mathbb{R}^+$ mit

$$0 < 1 + a_n \leq K_1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N},$$

und wegen

$$a_n = \underbrace{(1 + a_n)}_{\leq K_1} \cdot \frac{a_n}{\underbrace{1 + a_n}_{>0}} \leq K_1 \cdot \frac{a_n}{1 + a_n} = K_1 \cdot b_n$$

ergibt sich

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \leq \sum_{k=1}^{n} (K_1 \cdot b_k) = K_1 \cdot \sum_{k=1}^{n} b_k = K_1 \cdot t_n.$$

Da die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ nach Voraussetzung konvergiert, ist die Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach oben beschränkt, es gibt also ein $K_2 \in \mathbb{R}^+$ mit $t_n \leq K_2$ für alle $n \in \mathbb{N}$; damit gilt

$$s_n \leq K_1 \cdot \underbrace{t_n}_{\leq K_2} \underset{K_1 > 0}{\leq} K_1 \cdot K_2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls nach oben beschränkt ist und folglich die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ nichtnegativer Glieder nach Satz 3.6 1) schon konvergiert.