MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 7
02.12.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

25. a) Wir zeigen die Formel für die Partialsummen mit vollständiger Induktion:

„$n = 2$“: Es ist

$$s_2 = a_2 = \frac{1}{2 \cdot (2^2 - 1)} = \frac{1}{6} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2 \cdot 2 \cdot (2+1)}.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$s_{n+1} = s_n + a_{n+1} = \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)}\right) + \frac{1}{(n+1)\,((n+1)^2 - 1)} =$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)} + \frac{1}{(n+1)\,(n^2 + 2\,n)} = \frac{1}{4} + \frac{-(n+2)+2}{2\,n\,(n+1)\,(n+2)} =$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{-n}{2\,n\,(n+1)\,(n+2)} = \frac{1}{4} - \frac{1}{2\,(n+1)\,(n+2)}.$$

b) Wegen

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{2\,n\,(n+1)}\right) = \frac{1}{4}$$

ist die Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n^2-1)}$ als Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen konvergent,

und für ihre Summe gilt $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(n^2-1)} = \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{1}{4}$.

26. a) Wir zeigen zunächst

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n}.$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit mit vollständiger Induktion:

„$n = 0$“: Es ist

$$\sum_{k=0}^{0} a_k = a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = 4 - \frac{0+3}{2^0}.$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\sum_{k=0}^{n+1} a_k = \left(\sum_{k=0}^{n} a_k\right) + a_{n+1} = \left(4 - \frac{n+3}{2^n}\right) + \frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} =$$
$$= 4 - \left(\frac{2\,(n+3)}{2^{n+1}} - \frac{n+2}{2^{n+1}}\right) = 4 - \frac{n+4}{2^{n+1}} = 4 - \frac{(n+1)+3}{2^{n+1}}.$$

Wir zeigen jetzt

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^n\cdot\frac{3\,n+5}{2^n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit vollständiger Induktion:

„$n = 0$“: Es ist

$$\sum_{k=0}^{0}(-1)^k a_k = (-1)^0 a_0 = \frac{0+1}{2^0} = 1 = \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^0\cdot\frac{3\cdot 0+5}{2^0}\right)$$

„$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n+1}(-1)^k a_k &= \left(\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k\right) + (-1)^{n+1}\cdot a_{n+1} \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^n\cdot\frac{3\,n+5}{2^n}\right) + (-1)^{n+1}\cdot\frac{(n+1)+1}{2^{n+1}} \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^n\cdot\frac{3\,n+5}{2^n} + (-1)^{n+1}\cdot\frac{9\,n+18}{2^{n+1}}\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(-6\,n-10+9\,n+18)\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^{n+1}\cdot\frac{1}{2^{n+1}}\cdot(3\,n+8)\right) \\
&= \frac{1}{9}\cdot\left(4+(-1)^{n+1}\cdot\frac{3\,(n+1)+5}{2^{n+1}}\right).
\end{aligned}$$

b) Wir verwenden, daß $(\frac{n}{2^n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. Wegen

$$\sum_{k=0}^{n} a_k = 4 - \frac{n+3}{2^n} = 4 - \underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{3}{2^n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 4$$

ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 4$.
Ferner ist wegen

$$\left|(-1)^n\cdot\frac{3\,n+5}{2^n}\right| = \frac{3\,n+5}{2^n} = \underbrace{3\cdot\underbrace{\frac{n}{2^n}}_{\to 0}}_{\to 0} + \underbrace{\frac{5}{2^n}}_{\to 0} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

und damit

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k a_k = \frac{1}{9}\cdot\left(4+\underbrace{(-1)^n\cdot\frac{3\,n+5}{2^n}}_{\to 0}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{4}{9}$$

die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n$ konvergent, und für ihre Summe gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \, a_n = \frac{4}{9}.$$

27. Für jedes $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$ handelt es sich bei der Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

um eine geometrische Reihe der Form

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \, q^n \qquad \text{mit} \quad c = x+3 \quad \text{und} \quad q = \frac{1}{x-3};$$

diese konvergiert aber genau für $c = 0$ oder $|q| < 1$ und besitzt dann die Summe

$$\sum_{n=0}^{\infty} c \, q^n = \frac{c}{1-q}.$$

Wegen

$$|q| < 1 \iff \frac{1}{|x-3|} < 1 \iff 1 < |x-3| \iff$$
$$\iff x - 3 < -1 \text{ oder } x - 3 > 1 \iff x < 2 \text{ oder } x > 4$$

konvergiert also die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n}$$

genau für alle

$$x \in \,]-\infty, 2[\, \cup \,]4, \infty[\, = \mathbb{R} \setminus [2, 4] \, ,$$

und für die Summe der Reihe gilt dann

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x+3}{(x-3)^n} = \frac{x+3}{1 - \dfrac{1}{x-3}} = \frac{(x+3)\,(x-3)}{(x-3)-1} = \frac{x^2-9}{x-4}.$$

28. Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ ergibt sich notwendig, daß die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ der Reihenglieder eine Nullfolge ist; damit ist aber

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{1+a_n} = \frac{1}{1 + \lim\limits_{n \to \infty} a_n} = \frac{1}{1+0} = 1,$$

weswegen die Folge $\left(\dfrac{1}{1+a_n} \right)_{n \in \mathbb{N}}$ insbesondere keine Nullfolge ist und damit die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1+a_n}$ sicher divergiert.