MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 6
25.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

21. Für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = n \cdot (1 + (-1)^n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$a_n = \begin{cases} (2\,k-1) \cdot \big(1 + (-1)^{2k-1}\big) = 0, & \text{falls } n = 2\,k-1 \text{ ungerade,} \\ 2\,k \cdot \big(1 + (-1)^{2k}\big) = 4\,k, & \text{falls } n = 2\,k \text{ gerade.} \end{cases}$$

Damit gilt $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k-1} = 0$ und $\lim\limits_{k\to\infty} a_{2k} = +\infty$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Häufungspunkt $b = 0$ besitzt.

Für die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $b_n = \big(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\big(\frac{n\,\pi}{2}\big)\big)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich

$$\sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right) = \begin{cases} \sin\big(\frac{4\,k\,\pi}{2}\big) = \sin(2\,k\,\pi) = 0, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-1)\,\pi}{2}\right) = \sin\big(2\,k\,\pi - \frac{\pi}{2}\big) = -1, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-2)\,\pi}{2}\right) = \sin(2\,k\,\pi - \pi) = 0, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \sin\left(\frac{(4\,k-3)\,\pi}{2}\right) = \sin\big(2\,k\,\pi - \frac{3\,\pi}{2}\big) = 1, & \text{falls } n = 4\,k-3, \end{cases}$$

und damit

$$b_n = \left(1 + \frac{1}{n} \cdot \sin\left(\frac{n\,\pi}{2}\right)\right)^n = \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 4\,k, \\ \big(1 - \frac{1}{n}\big)^n, & \text{falls } n = 4\,k-1, \\ 1, & \text{falls } n = 4\,k-2, \\ \big(1 + \frac{1}{n}\big)^n, & \text{falls } n = 4\,k-3. \end{cases}$$

Die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt wegen

$$\lim_{k\to\infty} b_{4k} = \lim_{k\to\infty} b_{4k-2} = 1 \quad \text{sowie} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-1} = \frac{1}{e} \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} b_{4k-3} = e$$

die drei Häufungspunkte $c_1 = 1$ sowie $c_2 = \frac{1}{e}$ und $c_3 = e$.

Da durch die Betrachtung der Teilfolgen $(a_{2k-1})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(a_{2k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_{4k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-1})_{k\in\mathbb{N}}$, $(b_{4k-2})_{k\in\mathbb{N}}$ und $(b_{4k-3})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfaßt werden, gibt somit genau die oben bestimmten (und keine weiteren) Häufungspunkte.

22. Sei c Grenzwert einer konvergenten Teilfolge der gegebenen Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen; sei etwa $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ diese Teilfolge mit

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = c.$$

Folglich gilt

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = c^2;$$

dabei ist $\left(a_{n_k}^2\right)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Teilfolge der sogar als konvergent vorausgesetzten Folge $(a_n^2)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Damit erhalten wir

$$c^2 = \lim_{k\to\infty} a_{n_k}^2 = \lim_{n\to\infty} a_n^2 = a^2,$$

woraus sich aber sofort $c = a$ oder $c = -a$ ergibt.

23. Wir betrachten die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Wir zeigen zunächst $\quad a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \geq \frac{1}{2} \quad$ für alle $\ell \in \mathbb{N}$: es gilt zum einen

$$a_{2^{\ell+1}} = \sum_{k=1}^{2^{\ell+1}} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell} + \frac{1}{2^\ell + 1} + \ldots + \frac{1}{2^{\ell+1}}$$

und anderen

$$a_{2^\ell} = \sum_{k=1}^{2^\ell} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{2^\ell},$$

insgesamt also

$$a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} = \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2^\ell + 1}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}} + \ldots + \underbrace{\frac{1}{2^{\ell+1}}}_{\geq \frac{1}{2^{\ell+1}}}}_{\text{insgesamt } 2^\ell \text{ Summanden}} \geq 2^\ell \cdot \frac{1}{2^{\ell+1}} = \frac{1}{2}.$$

Wir folgern nun, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ keine Cauchyfolge ist. Eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist dabei eine Cauchyfolge, wenn die Aussage

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall\, m,\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| < \varepsilon$$

gilt; die Negation der Aussage lautet damit

$$\exists\, \varepsilon > 0 \quad \forall\, n_0 \in \mathbb{N} \quad \exists\, m,\, n \geq n_0 : \quad |a_n - a_m| \geq \varepsilon.$$

Sei nun $\varepsilon = \frac{1}{2}$; für alle $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt es nach dem Archimedischen Axiom ein $\ell \in \mathbb{N}$ mit $2^\ell > n_0$, und mit $m = 2^\ell \geq n_0$ und $n = 2^{\ell+1} \geq n_0$ gilt dann $|a_n - a_m| = |a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell}| = a_{2^{\ell+1}} - a_{2^\ell} \underset{\text{s.o.}}{\geq} \frac{1}{2} = \varepsilon$.

24. Gegeben ist die für einen beliebigen Startwert $a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$ durch

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Für die ersten Folgenglieder gilt

$$\begin{aligned} a_2 = 1 - \frac{1}{a_1} &= \frac{a_1 - 1}{a_1} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,, \\ a_3 = 1 - \frac{1}{a_2} &= 1 - \frac{a_1}{a_1 - 1} = \frac{(a_1 - 1) - a_1}{a_1 - 1} = \frac{-1}{a_1 - 1} \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,, \\ a_4 = 1 - \frac{1}{a_3} &= 1 - \frac{a_1 - 1}{-1} = 1 + (a_1 - 1) = a_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}\,, \end{aligned}$$

und damit $a_5 = a_2$ und $a_6 = a_3$, allgemein

$$a_{3k+1} = a_1 \quad \text{und} \quad a_{3k+2} = a_2 \quad \text{und} \quad a_{3k+3} = a_3 \quad \text{für alle} \quad k \in \mathbb{N}_0.$$

Damit sind die drei Teilfolgen $(a_{3k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$, $(a_{3k+2})_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(a_{3k+3})_{k\in\mathbb{N}_0}$ konstant, und die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt deren Grenzwerte a_1, a_2 und a_3 als Häufungspunkte; da durch diese drei Teilfolgen alle Folgenglieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ erfaßt sind, kann es keine weiteren Häufungspunkte geben.

Es bleibt noch zu zeigen, daß a_1, a_2 und a_3 paarweise verschiedene reelle Zahlen sind. Die Annahme $a_{n+1} = a_n$ für ein $n \in \mathbb{N}$ führt wegen

$$1 - \frac{1}{a_n} = a_n \qquad \text{bzw.} \qquad a_n - 1 = a_n^2 \qquad \text{bzw.} \qquad a_n^2 - a_n + 1 = 0$$

auf eine quadratische Gleichung, die aber wegen $a_n^2 - a_n + 1 = (a_n - \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4} > 0$ keine reelle Lösung besitzt, also auf einen Widerspruch. Damit gilt $a_{n+1} \neq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, insbesondere also $a_2 \neq a_1$ (für $n = 1$), $a_3 \neq a_2$ (für $n = 2$) und $a_1 = a_4 \neq a_3$ (für $n = 3$).