MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

17. Seien die reellen Zahlen α, $\beta \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachten wir die durch

$$a_{n+1} = \alpha \cdot a_n + \beta \qquad \text{mit} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Wir zeigen für die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die explizite Darstellung ihrer Folgenglieder

$$a_n = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

mit vollständiger Induktion:

- „$n = 1$“: Es ist

$$a_1 = a_{0+1} = \alpha \cdot a_0 + \beta = \alpha \cdot a_0 + \beta \cdot \alpha^0 = \alpha^1 \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{1-1} \alpha^k.$$

- „$n \to n+1$“: Es ist

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= \alpha \cdot a_n + \beta \\ &= \alpha \cdot \left(\alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k\right) + \beta \\ &= \alpha \cdot \alpha^n \cdot a_0 + \alpha \cdot \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + \beta \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\alpha \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k + 1\right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha^k + \alpha^0\right) \\ &= \alpha^{n+1} \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n} \alpha^k. \end{aligned}$$

b) Wir bestimmen nun die Werte von α, β und a_0, für welche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und treffen dazu folgenden Fallunterscheidung für $\alpha \in \mathbb{R}$.

- Fall 1: Für $\alpha = 1$ ist

$$a_n = 1^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} 1^k = a_0 + n \cdot \beta$$

für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann konvergent, wenn $\beta = 0$ ist, und wir erhalten die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a_0$.

- Fall 2: Für $\alpha \neq 1$ ergibt sich mit der geometrischen Summenformel

$$\begin{aligned} a_n &= \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \sum_{k=0}^{n-1} \alpha^k = \alpha^n \cdot a_0 + \beta \cdot \frac{1-\alpha^n}{1-\alpha} = \\ &= \alpha^n \cdot a_0 + \frac{\beta}{1-\alpha} - \frac{\beta}{1-\alpha} \cdot \alpha^n = \alpha^n \cdot \left(a_0 - \frac{\beta}{1-\alpha}\right) + \frac{\beta}{1-\alpha}. \end{aligned}$$

Ist zum einen der Startwert $a_0 = \frac{\beta}{1-\alpha}$, so erhalten wir die konstante Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{\beta}{1-\alpha}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; für diese gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.
Ist zum anderen der Startwert $a_0 \neq \frac{\beta}{1-\alpha}$, so konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann, wenn $(\alpha^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert; dies ist aber genau für $|\alpha| < 1$ der Fall, und es gilt dann $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \dfrac{\beta}{1-\alpha}$.

18. a) Wir zeigen zunächst $1 \leq a_n \leq 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

„$n = 0$“:

$$\text{Es ist } a_0 \in [1,3] \text{ und damit } 1 \leq a_0 \leq 3.$$

„$n \to n+1$“:

$$\begin{aligned} 1 \leq a_n \leq 3 &\implies 1^2 \leq a_n^2 \leq 3^2 \implies \frac{1}{4} \leq \frac{1}{4}\,a_n^2 \leq \frac{9}{4} \implies \\ &\implies \frac{1}{4} + \frac{3}{4} \leq \frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4} \leq \frac{9}{4} + \frac{3}{4} \implies 1 \leq a_{n+1} \leq 3 \end{aligned}$$

Damit ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \left(\frac{1}{4}\,a_n^2 + \frac{3}{4}\right) - a_n = \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 + 3 - 4a_n\right) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot \left(a_n^2 - 4a_n + 3\right) \underset{\text{Vieta}}{=} \frac{1}{4} \cdot \underbrace{(a_n - 1)}_{\geq 0} \cdot \underbrace{(a_n - 3)}_{\leq 0} \leq 0, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} \leq a_n$; damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton fallend.

b) Gemäß a) ist die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ für jeden Startwert $a_0 \in [1,3]$ monoton fallend und (durch 1) nach unten beschränkt, mithin konvergent. Für ihren Grenzwert

$$a = \lim_{n\to\infty} a_n$$

gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{4}\, a_n^2 + \frac{3}{4} \right) = \frac{1}{4}\, a^2 + \frac{3}{4},$$

woraus sich

$$0 = a^2 - 4\,a + 3 \underset{\text{Vieta}}{=} (a-1)\,(a-3)$$

und damit $a = 1$ oder $a = 3$ ergibt; dies motiviert die folgende Fallunterscheidung hinsichtlich des Startwertes $a_0 \in [1,3]$:

- Für $a_0 \in [1,3[$ gilt im Hinblick auf das in a) ermittelte Monotonieverhalten der Folge $a \le a_0 < 3$ und damit $a = 1$.
- Für $a_0 = 3$ ist $a_1 = \frac{1}{4}\cdot 3^2 + \frac{3}{4} = \frac{9}{4} + \frac{3}{4} = 3$ und analog $a_n = 3$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$; damit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine konstante Folge mit $a = 3$.

19. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{(2n^2+1)(n+1)^n}{(3n+1)\,n^{n+1}} = \frac{(2n^2+1)\cdot(n+1)^n}{(3n+1)\cdot(n\cdot n^n)} = \frac{2n^2+1}{(3n+1)\cdot n} \cdot \frac{(n+1)^n}{n^n} =$$
$$= \frac{n^2\left(2+\frac{1}{n^2}\right)}{n\left(3+\frac{1}{n}\right)\cdot n} \cdot \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} \cdot \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,$$

so daß der erste Faktor wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} = 0 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

als Quotient konvergenter Folgen selbst konvergiert mit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}} = \frac{2+0}{3+0} = \frac{2}{3};$$

der zweite Faktor ist eine bekanntlich monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge mit dem Grenzwert e, so daß die gegebene Folge als Produkt konvergenter Folgen selbst konvergiert, und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} \Bigg(\underbrace{\frac{2+\frac{1}{n^2}}{3+\frac{1}{n}}}_{\to\frac{2}{3}} \cdot \underbrace{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}_{\to e} \Bigg) = \frac{2}{3}\, e.$$

20. a) Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad \text{und} \qquad b_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

Wir erhalten mit Hilfe der Bernoullischen Ungleichung $(*)$ zum einen

$$
\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^n} = \frac{(n+2)^{n+1}\cdot n^n}{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^n} = \\
&= \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+2)\cdot n}{(n+1)^2}\right)^n = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{1}{(n+1)^2}\right)^n \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(1-\frac{n}{(n+1)^2}\right) = \frac{n+2}{n+1}\cdot\left(\frac{(n+1)^2-n}{(n+1)^2}\right) = \\
&= \frac{(n+2)\cdot(n^2+n+1)}{(n+1)^3} = \frac{n^3+3\,n^2+3\,n+2}{n^3+3\,n^2+3\,n+1} \geq 1
\end{aligned}
$$

sowie zum anderen

$$
\begin{aligned}
\frac{b_n}{b_{n+1}} &= \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}}{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}{\left(\frac{n+2}{n+1}\right)^{n+2}} = \frac{(n+1)^{n+1}\cdot(n+1)^{n+2}}{n^{n+1}\cdot(n+2)^{n+2}} = \\
&= \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{(n+1)^2}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{1}{n\cdot(n+2)}\right)^{n+1} \underset{(*)}{\geq} \\
&\geq \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(1+\frac{n+1}{n\cdot(n+2)}\right) = \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n\cdot(n+2)+n+1}{n\cdot(n+2)}\right) = \\
&= \frac{n+1}{n+2}\cdot\left(\frac{n^2+3\,n+1}{n^2+2\,n}\right) = \frac{n^3+4\,n^2+4\,n+1}{n^3+4\,n^2+4\,n} \geq 1.
\end{aligned}
$$

b) Wir zeigen, daß $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist.

- Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $1+\frac{1}{n}>1$ und damit
$$a_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \leq \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} = b_n.$$
- Nach a) gilt wegen $\frac{a_{n+1}}{a_n}\geq 1$ und $a_n>0$ schon $a_{n+1}\geq a_n$ für alle $n\in\mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.
- Nach a) gilt wegen $\frac{b_n}{b_{n+1}}\geq 1$ und $b_{n+1}>0$ schon $b_n\geq b_{n+1}$ für alle $n\in\mathbb{N}$, und damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend.
- Für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt $a_n\leq b_n\leq b_1$ und damit
$$
\begin{aligned}
0\leq b_n-a_n &= \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} - \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \\
&= \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)-1\right) = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cdot\frac{1}{n} \\
&= a_n\cdot\frac{1}{n} \leq b_1\cdot\frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} b_1\cdot 0 = 0;
\end{aligned}
$$
folglich ist $(b_n-a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Schrankenlemma eine Nullfolge.

Es sei bemerkt, daß für die durch diese Intervallschachtelung $([a_n,b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ definierte eulersche Zahl $e\in\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}[a_n,b_n]$ gemäß

$$\frac{7776}{3125} = \left(\frac{6}{5}\right)^5 = a_5 \leq e \leq b_5 = \left(\frac{6}{5}\right)^6 = \frac{46656}{15625}$$

insbesondere $2<e<3$ gilt.