MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

13. Wir weisen die Konvergenz der durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n^3 + 1\right) \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierten Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dadurch nach, indem wir jeweils mit vollständiger Induktion zeigen, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und (etwa durch 0) nach unten beschränkt ist:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq a_{n+1}$:
  „$n = 1$“: Es ist $a_1 = 1$ und $a_2 = \frac{1}{3}\left(a_1^3 + 1\right) = \frac{2}{3}$, also $a_1 \geq a_2$.
  „$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung $a_n \geq a_{n+1}$ folgt wegen der Monotonie der dritten Potenz $a_n^3 \geq a_{n+1}^3$, woraus sich mit dem Monotoniegesetz der Addition
  $$a_n^3 + 1 \geq a_{n+1}^3 + 1$$
  sowie mit dem Monotoniegesetz der Multiplikation
  $$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n^3 + 1\right) \geq \frac{1}{3}\left(a_{n+1}^3 + 1\right) = a_{n+2},$$
  also die Induktionsbehauptung, ergibt.
- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \geq 0$:
  „$n = 1$“: Es ist $a_1 = 1$, also $a_1 \geq 0$.
  „$n \to n+1$“: Aus der Induktionsvoraussetzung $a_n \geq 0$ folgt $a_n^3 \geq 0$ und damit in
  $$a_{n+1} = \frac{1}{3}\left(a_n^3 + 1\right) \geq \frac{1}{3}\left(0^3 + 1\right) = \frac{1}{3} \geq 0$$
  die Induktionsbehauptung.

Die Bestimmung des in seiner Existenz nachgewiesenen Grenzwertes $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ ist nicht verlangt.

14. a) Wir zeigen die Behauptung mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:
$$\text{Es ist } a_1 = 5 \text{ und damit } 3 \leq a_1 \leq 5.$$

„$n \to n+1$“:

$$3 \leq a_n \leq 5 \implies 4 \geq 7 - a_n \geq 2 \implies \frac{1}{2} \leq \frac{2}{7-a_n} \leq 1 \implies$$
$$\frac{7}{2} \leq 3 + \frac{2}{7-a_n} \leq 4 \implies 3 \leq a_{n+1} \leq 5$$

b) Wir zeigen $a_n \geq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit vollständiger Induktion:
„$n = 1$“:

$$a_1 = 5 \geq 4 = 3 + \frac{2}{7-5} = a_2.$$

„$n \to n+1$“:

$$a_n \geq a_{n+1} \implies 7 - a_n \leq 7 - a_{n+1} \implies \frac{2}{7-a_n} \geq \frac{2}{7-a_{n+1}} \implies$$
$$a_{n+1} = 3 + \frac{2}{7-a_n} \geq 3 + \frac{2}{7-a_{n+1}} = a_{n+2}$$

Damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend und gemäß a) beschränkt, folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.

c) Für den Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ gilt $3 \leq a \leq 5$ gemäß a), und damit erhält man

$$a = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \left(3 + \frac{2}{7-a_n}\right) = 3 + \frac{2}{7 - \lim\limits_{n\to\infty} a_n} = 3 + \frac{2}{7-a}.$$

Damit folgt

$$(a-3)\,(7-a) = 2 \implies -a^2 + 10\,a - 21 = 2 \implies$$
$$a^2 - 10\,a + 23 = 0 \implies a = \frac{10 \pm \sqrt{8}}{2} = 5 \pm \sqrt{2};$$

wegen $3 \leq a \leq 5$ folgt hieraus schon $a = 5 - \sqrt{2}$.

15. a) Wir zeigen $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit Hilfe vollständiger Induktion:
„$n = 1$“: Wegen $a_1 = \frac{1}{2}$ ist $0 < a_1 < 1$.
„$n \to n+1$“: Es ist also $0 < a_n < 1$. Wegen $a_n > 0$ ist

$$2\,a_n + 1 > 0 \qquad \text{und} \qquad 2 + a_n > 0$$

und damit

$$a_{n+1} = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} > 0;$$

ferner ist wegen $a_n < 1$ auch $a_n - 1 < 0$ und damit

$$a_{n+1} - 1 = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} - 1 = \frac{(2\,a_n + 1) - (2 + a_n)}{2 + a_n} = \frac{a_n - 1}{2 + a_n} < 0,$$

also $a_{n+1} < 1$. Insgesamt gilt also $0 < a_{n+1} < 1$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $0 < a_n < 1$ gemäß a), woraus $2 + a_n > 0$ und $a_n^2 < 1$, also $1 - a_n^2 > 0$ folgt; somit erhält man

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n = \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} - a_n = \frac{(2\,a_n + 1) - a_n(2 + a_n)}{2 + a_n} &= \\ = \frac{2\,a_n + 1 - 2\,a_n - a_n^2}{2 + a_n} = \frac{1 - a_n^2}{2 + a_n} &> 0, \end{aligned}$$

also $a_{n+1} > a_n$. Damit ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ streng monoton wachsend.

c) Die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist gemäß b) (streng) monoton wachsend und gemäß a) (nach oben) beschränkt, also konvergent. Für ihren Grenzwert $a = \lim\limits_{n \to \infty} a_n$ gilt dann unter Verwendung der Rekursionsvorschrift

$$a = \lim_{n \to \infty} a_{n+1} = \lim_{n \to \infty} \frac{2\,a_n + 1}{2 + a_n} = \frac{2\,a + 1}{2 + a},$$

woraus sich

$$a\,(2 + a) = 2\,a + 1, \qquad \text{also} \qquad 2\,a + a^2 = 2\,a + 1,$$

und damit

$$a^2 = 1, \qquad \text{also} \qquad a \in \{-1, 1\}$$

ergibt; wegen $a_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ muß auch $a \geq 0$ gelten, womit man schließlich $a = 1$ erhält.

16. Zu betrachten ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n + k} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N};$$

damit ist etwa

$$\begin{aligned} a_1 &= \sum_{k=1}^{1} \frac{1}{1 + k} &&= \frac{1}{2} \\ a_2 &= \sum_{k=1}^{2} \frac{1}{2 + k} &&= \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{7}{12} \\ a_3 &= \sum_{k=1}^{3} \frac{1}{3 + k} &&= \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} = \frac{37}{60} \end{aligned}$$

a) Gemäß obiger Rechnung ist

$$a_1 = \frac{30}{60} \quad \text{und} \quad a_2 = \frac{35}{60} \quad \text{und} \quad a_3 = \frac{37}{60}, \qquad \text{also} \qquad a_1 < a_2 < a_3;$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ gilt ferner

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{(n+1)+k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \\
&= \left(\frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2\,n} + \frac{1}{2n+1} + \frac{1}{2n+2}\right) \\
&\quad -\left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \ldots + \frac{1}{2\,n}\right) \\
&= -\underbrace{\frac{1}{n+1}}_{=\frac{2}{2(n+1)}} + \underbrace{\frac{1}{2n+1}}_{>\frac{1}{2n+2}} + \frac{1}{2n+2} \\
&> -\frac{2}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} + \frac{1}{2n+2} = 0, \quad \text{also} \quad a_{n+1} > a_n.
\end{aligned}$$

Folglich gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist.

b) Wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch 1 nach oben beschränkt ist. Sei dazu $n \in \mathbb{N}$; für alle $k \in \{1, \ldots, n\}$ gilt

$$n + k \geq n > 0 \qquad \text{und damit} \qquad \frac{1}{n+k} \leq \frac{1}{n},$$

und wir erhalten

$$a_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n+k} \leq \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n} = n \cdot \frac{1}{n} = 1.$$

Nach dem Hauptsatz über monotone Folgen ist die gemäß a) monoton wachsende und nach oben beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.