

Tutorium zur Vorlesung
„Differential- und Integralrechnung I“
 — Bearbeitungsvorschlag —

9. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist nach dem binomischen Lehrsatz bzw. der binomischen Formel

- $(2n^2 + 3)^3 = (2n^2)^3 + 3(2n^2)^2 \cdot 3 + 3(2n^2) \cdot 3^2 + 3^3 = 8n^6 + 36n^4 + 54n^2 + 27$
- $(3n^3 + 2)^2 = (3n^3)^2 + 2(3n^3) \cdot 2 + 2^2 = 9n^6 + 12n^3 + 4$

und damit

$$\begin{aligned} \frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} &= \frac{8n^6 + 36n^4 + 54n^2 + 27}{9n^6 + 12n^3 + 4} = \\ &= \frac{n^6 \left(8 + \frac{36}{n^2} + \frac{54}{n^4} + \frac{27}{n^6}\right)}{n^6 \left(9 + \frac{12}{n^3} + \frac{4}{n^6}\right)} = \frac{8 + \frac{36}{n^2} + \frac{54}{n^4} + \frac{27}{n^6}}{9 + \frac{12}{n^3} + \frac{4}{n^6}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{8 + 0 + 0 + 0}{9 + 0 + 0} = \frac{8}{9} \end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned} (2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2 &= -n^6 + 36n^4 - 12n^3 + 54n^2 + 23 = \\ &= \underbrace{n^6}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left(-1 + \frac{36}{n^2} - \frac{12}{n^3} + \frac{54}{n^4} + \frac{23}{n^6}\right)}_{\rightarrow -1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

Zu diesen Ergebnissen kann man auch gelangen, ohne die Potenzen der beiden auftretenden Summen zu berechnen; es ist nämlich

$$\frac{(2n^2 + 3)^3}{(3n^3 + 2)^2} = \frac{\left(n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right)^3}{\left(n^3 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)\right)^2} = \frac{n^6 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3}{n^6 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2} = \frac{\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3}{\left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{(2+0)^3}{(3+0)^2} = \frac{8}{9}$$

sowie

$$\begin{aligned} (2n^2 + 3)^3 - (3n^3 + 2)^2 &= \left(n^2 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)\right)^3 - \left(n^3 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)\right)^2 = \\ &= n^6 \left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3 - n^6 \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2 = \\ &= \underbrace{n^6}_{\rightarrow \infty} \cdot \underbrace{\left[\left(2 + \frac{3}{n^2}\right)^3 - \left(3 + \frac{2}{n^3}\right)^2\right]}_{\rightarrow (2+0)^3 - (3+0)^2 = -1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$

Schließlich ist

$$\frac{\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3}}{\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3}} = \frac{n^2 \left(\frac{2}{n^2} - \frac{3}{n^3} \right)}{n^2 \left(\frac{3}{n^2} + \frac{3}{n^3} \right)} = \frac{2 - \frac{3}{n}}{3 + \frac{3}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{2 - 0}{3 + 0} = \frac{2}{3}$$

10. Für die (hier zu betrachtenden) Parameter $z \in \mathbb{R}^+$ ergibt sich hinsichtlich des Konvergenzverhaltens der Folge $(z^n)_{n \in \mathbb{N}}$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} z^n = \begin{cases} 0, & \text{falls } 0 < z < 1, \\ 1, & \text{falls } z = 1, \\ +\infty, & \text{falls } 1 < z; \end{cases}$$

dies motiviert die folgenden Fallunterscheidungen bezüglich x und $y \in \mathbb{R}^+$:

- a) Für $0 < x < 1$ ergibt sich zunächst

$$\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0,$$

und mit Hilfe einer Fallunterscheidung bezüglich $y > 0$ erhält man stets

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

Ohne Fallunterscheidung kann man wie folgt argumentieren: für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $x^n > 0$ und $1 + y^n > 1$ und damit

$$0 < \frac{x^n}{1 + y^n} < x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0;$$

nach dem Schrankenlemma ergibt sich folglich

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0;$$

damit ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

- b) Für $x = 1$ ist $x^n = 1$ und damit

$$a_n = \frac{1}{1 + y^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; somit erhält man:

- Für $0 < y < 1$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- Für $y = 1$ ist $y^n = 1$ und damit $a_n = \frac{1}{2}$ für alle $n \in \mathbb{N}$; insbesondere ist

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \frac{1}{2}.$$

- Für $1 < y$ ist

$$1 + \underbrace{y^n}_{\rightarrow +\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

- c) Für $x > 1$ erhält man

$$a_n = \frac{x^n}{1 + y^n} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \frac{y^n}{x^n}} = \frac{1}{\frac{1}{x^n} + \left(\frac{y}{x}\right)^n}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit

$$x^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{und damit} \quad \frac{1}{x^n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

Damit erhält man:

- Für $0 < y < x$ ist $\frac{y}{x} < 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\rightarrow 0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty.$$

- Für $y = x$ ist $\frac{y}{x} = 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{=1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1.$$

- Für $x < y$ ist $\frac{y}{x} > 1$, also

$$\underbrace{\frac{1}{x^n}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{y}{x}\right)^n}_{\rightarrow +\infty} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty \quad \text{und damit} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

11. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n < 10^6$ gilt

$$\sqrt{n} < \sqrt{10^6} = 10^3 = 1000;$$

daraus folgt dann

$$\frac{1}{1000} < \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \text{und damit} \quad \frac{n}{1000} < \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}.$$

Zusammengefaßt erhält man

$$1000 > \sqrt{n} > \frac{n}{1000} \quad \text{und damit} \quad n + 1000 > n + \sqrt{n} > n + \frac{n}{1000},$$

wegen der Monotonie der Quadratwurzel also

$$\sqrt{n + 1000} > \sqrt{n + \sqrt{n}} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}}$$

und damit

$$\sqrt{n + 1000} - \sqrt{n} > \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n} > \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n},$$

also $a_n > b_n > c_n$.

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$\begin{aligned} a_n &= \sqrt{n+1000} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+1000} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+1000} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+1000}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \frac{(n+1000) - n}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} = \frac{1000}{\sqrt{n+1000} + \sqrt{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_n &= \sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n} = \frac{(\sqrt{n+\sqrt{n}} - \sqrt{n}) \cdot (\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n})}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}^2 - \sqrt{n}^2}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{(n+\sqrt{n}) - n}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+\sqrt{n}} + \sqrt{n}} = \\ &= \frac{1}{\frac{\sqrt{n+\sqrt{n}}}{\sqrt{n}} + 1} = \frac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{\sqrt{n}}} + 1} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{1+0} + 1} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

und

$$c_n = \sqrt{n + \frac{n}{1000}} - \sqrt{n} = \sqrt{n} \cdot \underbrace{\left(\sqrt{1 + \frac{1}{1000}} - 1 \right)}_{>0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty.$$

12. a) Seien $a_n = n^2$ sowie $b_n = \frac{1}{n}$ und damit $a_n b_n = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = +\infty$.
- b) Seien $a_n = n^2$ sowie $b_n = -\frac{1}{n}$ und damit $a_n b_n = -n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = -\infty$.
- c) Seien $a_n = n$ sowie $b_n = \frac{c}{n}$ und damit $a_n b_n = c$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$ und $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = c$.
- d) Seien $a_n = n$ sowie $b_n = \frac{(-1)^n}{n}$ und damit $a_n b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$; dann ist $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = +\infty$ sowie $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = 0$, und die Folge $(a_n b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt und divergent.