MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

5. Wir weisen anhand der Definition nach, daß die gegebene Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

den Grenzwert $a = 0$ besitzt; sei dazu $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{\sin^3 n - 3\,\cos n}{\sqrt{n}} - 0\right| = \frac{\left|\sin^3 n - 3\,\cos n\right|}{\sqrt{n}} \leq$$
$$\leq \frac{\left|\sin^3 n\right| + |3\,\cos n|}{\sqrt{n}} = \frac{|\sin n|^3 + 3 \cdot |\cos n|}{\sqrt{n}} \leq \frac{1^3 + 3 \cdot 1}{\sqrt{n}} = \frac{4}{\sqrt{n}}$$

mit

$$\frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon \iff \frac{4}{\varepsilon} < \sqrt{n} \iff \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2 < n.$$

Wir wählen eine natürliche Zahl n_0 mit $n_0 > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$, so daß wir für alle $n \geq n_0$ wegen $n > \left(\frac{4}{\varepsilon}\right)^2$ damit

$$|a_n - a| \leq \frac{4}{\sqrt{n}} < \varepsilon$$

erhalten.

6. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist die Aussage

$$A(n) \quad : \quad \text{„Für alle } x \in \mathbb{R} \text{ mit } x \geq -1 \text{ gilt } (1+x)^n \geq 1 + n \cdot x.\text{“}$$

mit Hilfe vollständiger Induktion zu zeigen:

- Für „$n = 1$“ ist
$$(1+x)^1 = 1 + x = 1 + 1 \cdot x.$$
- Für „$n \to n+1$“ folgt aus der Induktionsvoraussetzung
$$(1+x)^n \geq 1 + n \cdot x$$
wegen $1 + x \geq 0$ nach dem Monotoniegesetz der Multiplikation
$$(1+x)^n \cdot (1+x) \geq (1 + n \cdot x) \cdot (1+x)$$

und damit in

$$(1+x)^{n+1} \geq 1 + n\cdot x + x + n\cdot x^2 = \\ = 1 + (n+1)\cdot x + \underbrace{n\cdot x^2}_{\geq 0} \geq 1 + (n+1)\cdot x$$

die Induktionsbehauptung.

b) Es ist zu zeigen, daß die gegebene Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

konvergiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \leq 1, \qquad \text{also} \quad -1 \leq -\frac{1}{n^2} \leq 0 \quad \text{und} \quad 0 \leq 1 - \frac{1}{n^2} \leq 1,$$

woraus sich zum einen mit der Bernoullischen Ungleichung

$$c_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n = \left(1 + \frac{-1}{n^2}\right)^n \underset{\text{mit } x=\frac{-1}{n^2}}{\geq} 1 + n\cdot\frac{-1}{n^2} = 1 - \frac{1}{n}$$

und zum anderen

$$c_n = \Bigl(\underbrace{1 - \frac{1}{n^2}}_{\in[0,1]}\Bigr)^n \leq 1,$$

also

$$a_n \leq c_n \leq b_n \qquad \text{mit} \quad a_n = 1 - \frac{1}{n} \quad \text{und} \quad b_n = 1,$$

ergibt. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - 0 = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} 1 = 1$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und besitzt (wie die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$) ebenfalls den Grenzwert 1.

7. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ergibt sich unter Verwendung der Gaußformel für die Summe der ersten n natürlichen Zahlen

$$a_n = \frac{1+2+\ldots+n}{n^2} = \frac{1}{n^2}\cdot\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2} = \\ = \frac{1}{2}\cdot\frac{n+1}{n} = \frac{1}{2}\cdot\Bigl(1 + \underbrace{\frac{1}{n}}_{\to 0}\Bigr) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2}\cdot(1+0) = \frac{1}{2}.$$

Mit Hilfe der geometrische Summenformel erhält man ferner für alle $n \in \mathbb{N}$

$$b_n = \sum_{k=0}^{n}\frac{(-2)^k}{7^k} = \sum_{k=0}^{n}\left(-\frac{2}{7}\right)^k = \frac{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{1-\left(-\frac{2}{7}\right)} = \frac{1-\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}{\frac{9}{7}} = \\ = \frac{7}{9}\cdot\Bigl(1 - \underbrace{\left(-\frac{2}{7}\right)^{n+1}}_{\to 0,\text{ da } \left|-\frac{2}{7}\right|<1}\Bigr) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{7}{9}\cdot(1-0) = \frac{7}{9}.$$

8. a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+1} < r + \frac{1}{n};$$

damit gibt es, da $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt, rationale Zahlen a_n und $b_n \in \mathbb{Q}$ mit

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n}.$$

b) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r - \frac{1}{n} < a_n < r - \frac{1}{n+1} \qquad \text{und} \qquad r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1} < r - \frac{1}{n+2}$$

und damit

$$a_n < r - \frac{1}{n+1} < a_{n+1};$$

damit ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(r - \frac{1}{n}\right) = r \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(r - \frac{1}{n+1}\right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = r$.

c) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

$$r + \frac{1}{n+1} < b_n < r + \frac{1}{n} \qquad \text{und} \qquad r + \frac{1}{n+2} < b_{n+1} < r + \frac{1}{n+1}$$

und damit

$$b_n > r + \frac{1}{n+1} > b_{n+1};$$

damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton fallend. Wegen

$$\lim_{n\to\infty}\left(r + \frac{1}{n+1}\right) = r \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty}\left(r + \frac{1}{n}\right) = r$$

ist nach dem Schrankenlemma auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = r$.