MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 1
21.10.2019

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“ — Bearbeitungsvorschlag —

1. a) Es ist

- $a_1 = \frac{3}{3} = 1$, $a_2 = \frac{5}{4}$, $a_3 = \frac{7}{5}$, $a_4 = \frac{9}{6} = \frac{3}{2}$ und $a_5 = \frac{11}{7}$ sowie
- $b_1 = 1 - 1 + 1 = 1$, $b_2 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{7}{4}$, $b_3 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} = \frac{7}{9}$, $b_4 = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} = \frac{21}{16}$ und $b_5 = 1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{25} = \frac{21}{25}$.

b) Die Berechnung der ersten fünf Folgenglieder unter a) legt nahe, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist; dies läßt sich auf verschiedene Weise zeigen:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$a_n = \frac{2\,n+1}{n+2} = \frac{2\,(n+2)-3}{n+2} = 2 - \frac{3}{n+2}$$

und damit auch

$$a_{n+1} = 2 - \frac{3}{n+3};$$

wegen $n+2 < n+3$ ist $\dfrac{3}{n+2} > \dfrac{3}{n+3}$ und damit

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2 - \frac{3}{n+3} = a_{n+1}.$$

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_n < a_{n+1} &\iff \frac{2\,n+1}{n+2} < \frac{2\,n+3}{n+3} \iff \\ &\iff (2\,n+1)\,(n+3) < (2\,n+3)\,(n+2) \iff \\ &\iff 2\,n^2 + 7\,n + 3 < 2\,n^2 + 7\,n + 6 \iff 0 < 3 \end{aligned}$$

Da die Aussage $0 < 3$ richtig ist, ist auch die gemäß den Äquivalenzumformungen („ $\iff$ “) gleichwertige Aussage $a_n < a_{n+1}$ richtig.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2\,n+3}{n+3} - \frac{2\,n+1}{n+2} = \frac{(2\,n+3)(n+2) - (2\,n+1)(n+3)}{(n+3)\,(n+2)} = \\ &= \frac{(2\,n^2+7\,n+6) - (2\,n^2+7\,n+3)}{(n+3)\,(n+2)} = \frac{3}{(n+3)\,(n+2)} > 0 \end{aligned}$$

und damit $a_n < a_{n+1}$.

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{2\,n+3}{n+3} \cdot \frac{n+2}{2\,n+1} = \frac{2\,n^2+7\,n+6}{2\,n^2+7\,n+3} > 1$$

und damit $a_n < a_{n+1}$; hierbei geht $a_n > 0$ ein.

Die streng monoton wachsende Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist insbesondere (etwa durch $a_1 = 1$) nach unten beschränkt; des weiteren ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wegen

$$a_n = 2 - \frac{3}{n+2} < 2$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ auch nach oben beschränkt.

Wegen $b_1 = 1 < \frac{7}{4} = b_2$ und $b_2 = \frac{7}{4} > \frac{7}{9} = b_3$ ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ weder monoton fallend noch monoton wachsend; genauer gilt für alle $m \in \mathbb{N}$

$$b_{2m} = 1 + \frac{(-1)^{2m}}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} = 1 + \frac{1}{2m} + \frac{1}{(2m)^2} > 1$$

und

$$b_{2m+1} = 1 + \frac{(-1)^{2m+1}}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} = $$
$$= 1 - \frac{1}{2m+1} + \frac{1}{(2m+1)^2} = 1 - \frac{2m}{(2m+1)^2} < 1,$$

folglich also $b_{2m} > 1 > b_{2m+1}$ und $b_{2m+1} < 1 < b_{2m+2}$.

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt mit der Dreiecksungleichung

$$|b_n| = \left|1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leq |1| + \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right| = 1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2},$$

und wegen $\frac{1}{n} \leq 1$ und $\frac{1}{n^2} \leq 1$ folgt daraus $|b_n| \leq 1 + 1 + 1 = 3$; damit ist die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

c) Wir zeigen, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = 2$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{3}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| = \left|\frac{2\,n+1}{n+2} - 2\right| = \left|\frac{(2\,n+1) - 2\,(n+2)}{n+2}\right| =$$
$$= \left|\frac{-3}{n+2}\right| = \frac{3}{n+2} \leq \frac{3}{n_0} = 3 \cdot \frac{1}{n_0} < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$

Wir zeigen, daß die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $b = 1$ besitzt. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \frac{\varepsilon}{2}$, und für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt

$$|b_n - b| = \left|\left(1 + \frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right) - 1\right| = \left|\frac{(-1)^n}{n} + \frac{1}{n^2}\right| \leq$$
$$\leq \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| + \left|\frac{1}{n^2}\right| \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = 2 \cdot \frac{1}{n} \leq 2 \cdot \frac{1}{n_0} < 2 \cdot \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

2. a) Wir zeigen

$$a_n = \prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right)$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$ mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 2$" ist

$$a_2 = \prod_{k=2}^{2} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) = 1 - \frac{2}{2(2+1)} = \frac{2}{3} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{2}\right)$$

- Für „$n \to n+1$" ist

$$\begin{aligned}
a_{n+1} &= \prod_{k=2}^{n+1} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right) \\
&= \left(\prod_{k=2}^{n} \left(1 - \frac{2}{k(k+1)}\right)\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) \cdot \left(1 - \frac{2}{(n+1)(n+2)}\right) \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{(n+1)(n+2) - 2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{(n^2 + 3n + 2) - 2}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+2}{n} \cdot \frac{n(n+3)}{(n+1)(n+2)} \\
&= \frac{1}{3} \cdot \frac{n+3}{n+1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{(n+1)+2}{n+1} = \frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n+1}\right).
\end{aligned}$$

b) Wir zeigen anhand der Definition, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den Grenzwert $a = \frac{1}{3}$ besitzt. Zunächst gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$|a_n - a| = \left|\frac{1}{3}\left(1 + \frac{2}{n}\right) - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{1}{3} + \frac{2}{3\,n} - \frac{1}{3}\right| = \frac{2}{3\,n} \leq \frac{1}{n}.$$

Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es nun ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\dfrac{1}{n_0} < \varepsilon$, und für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n - a| < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} < \varepsilon;$$

damit konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $a = \frac{1}{3}$. Für $\varepsilon = \frac{1}{1000}$ kann wegen

$$\frac{1}{n_0} < \frac{1}{1000} \quad \text{bzw.} \quad n_0 > 1000$$

etwa $n_0 = 1001$ gewählt werden.

3. a) Wir zeigen die Aussage

$$n^3 < 2^n \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{mit} \quad n \geq 10$$

mit Hilfe vollständiger Induktion:

- Für „$n = 10$" ist
$$10^3 = 1000 < 1024 = 2^{10}.$$
- Für „$n \to n+1$" ist
$$\begin{aligned} (n+1)^3 &= n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + 1 \leq n^3 + 3\,n^2 + 3\,n + n \\ &= n^3 + 3\,n^2 + 4\,n \leq n^3 + 3\,n^2 + n \cdot n \\ &\leq n^3 + 4\,n^2 \leq n^3 + n \cdot n^2 = 2\,n^3 < 2 \cdot 2^n = 2^{n+1}. \end{aligned}$$

b) Zu betrachten ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 10$ gilt gemäß a)

$$|a_n - 0| = \left| \frac{n^2}{2^n} - 0 \right| = \frac{n^2}{2^n} < \frac{1}{n};$$

für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es nun nach dem Archimedischen Axiom ein $n_1 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_1} < \varepsilon$. Sei nun $n_0 = \max\{n_1, 10\}$; für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$ gilt damit

$$|a_n - 0| \underset{n \geq n_0 \geq 10}{<} \frac{1}{n} \leq \frac{1}{n_0} \underset{n_0 \geq n_1}{<} \varepsilon.$$

Folglich ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.

4. Für die beschränkte Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ reeller Zahlen existiert eine Schranke $M > 0$ mit $|b_n| \leq M$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

a) Ist die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt, so gibt es eine Schranke $M^* > 0$ mit $|a_n| \leq M^*$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit gilt aber

$$|a_n\, b_n| = |a_n| \cdot |b_n| \leq M \cdot M^*$$

für alle $n \in \mathbb{N}$; folglich ist auch die Folge $(a_n\, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ beschränkt.

b) Die konstante Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $a_n = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist konvergent, und die alternierende Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist beschränkt; für die Folge $(a_n\, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gilt dann $a_n\, b_n = (-1)^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und damit ist $(a_n\, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ nicht konvergent.

c) Ist $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so daß für alle $n \geq n_0$ gilt

$$|a_n| = |a_n - 0| < \frac{\varepsilon}{M}$$

und damit

$$|a_n\, b_n - 0| = |a_n| \cdot |b_n| < \frac{\varepsilon}{M} \cdot M = \varepsilon;$$

damit ist auch $(a_n\, b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Nullfolge.