MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 13
27.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

49. a) Für $a \in \mathbb{R}$ betrachte man die Funktion $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^a$. Man zeige, daß f stetig und für $a > 0$ streng monoton wachsend bzw. für $a < 0$ streng monoton fallend ist.

    b) Man zeige, daß die Exponentialfunktion $\exp_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\exp_a(x) = a^x$, zur Basis $a > 0$ stetig ist, untersuche sie in Abhängigkeit von a auf Monotonie und bestimme ihren Wertebereich.

50. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Es seien $a,\ b \in \,]0,1[$ fest gewählt. Man zeige, daß die Gleichung
$$a^x + b^x = 1$$
genau eine Lösung im Intervall $]0,\infty[$ besitzt.

51. Es seien die Funktionen *Sinus hyperbolicus* $\sinh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\sinh x = \frac{1}{2}\left(e^x - e^{-x}\right)$, und *Cosinus hyperbolicus* $\cosh : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $\cosh x = \frac{1}{2}\left(e^x + e^{-x}\right)$, gegeben.

    a) Man untersuche sinh und cosh auf Symmetrie, Nullstellen und Stetigkeit und bestimme ihre Grenzwerte für $x \to \pm\infty$.

    b) Man zeige die Additionstheoreme $\sinh(x+y) = \sinh x \cdot \cosh y + \cosh x \cdot \sinh y$ und $\cosh(x+y) = \cosh x \cdot \cosh y + \sinh x \cdot \sinh y$ und folgere daraus die Beziehung $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ für alle $x,\ y \in \mathbb{R}$.

    c) Man zeige $W_{\sinh} = \mathbb{R}$ und $W_{\cosh} = [1,\infty[$.

52. a) Man zeige, daß die Funktion sinh streng monoton wächst, und bestätige, daß für die Umkehrfunktion *Area sinus hyberbolicus* $\operatorname{Arsinh} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Arsinh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$.

    b) Man zeige, daß die Einschränkung $\cosh|_{\mathbb{R}_0^+}$ von cosh auf $\mathbb{R}_0^+$ streng monoton wächst und die Wertemenge $[1,\infty[$ besitzt, und bestätige, daß für die Umkehrfunktion *Area cosinus hyperbolicus* $\operatorname{Arcosh} : [1,\infty[\, \to \mathbb{R}$ gilt $\operatorname{Arcosh} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right)$.

    c) Man skizziere die Graphen von sinh und cosh sowie von Arsinh und Arcosh.

Abgabe bis Montag, den 3. Februar 2020, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).