MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 12
20.01.2020

# Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

45. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^3 + x + 1$.

    a) Man zeige, daß $f$ genau eine Nullstelle besitzt, und gebe ein Intervall der Länge 1 an, in dem diese Nullstelle von $f$ liegt.

    b) Man bestimme ein Intervall der Länge $\frac{1}{8}$, in dem $f$ die Nullstelle besitzt.

46. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2004).* Für jedes $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 3$ betrachte man die Funktionen
$$f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n - n\,x + 1.$$
Man zeige:

    a) Jede Funktion $f_n$ besitzt genau eine Nullstelle $\xi_n \in \,]0, 1[$.

    b) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \xi_n = 0$.

47. Es sei $a \in \mathbb{R}^+$ sowie $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(-a) = f(a)$.

    a) Man zeige, daß es ein $\xi \in [0, a]$ mit $f(\xi) = f(\xi - a)$ gibt.

    b) Man gebe für die Funktion $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x^2 - a^2)\,(x + 2a)$ ein geeignetes $\xi$ explizit an.

48. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2013).* Gegeben seien zwei stetige Funktionen
$$f : [-1, 1] \to \mathbb{R} \qquad \text{und} \qquad g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$$
mit der Eigenschaft
$$\sup\{f(x) \mid -1 \leq x \leq 1\} = \sup\{g(x) \mid -1 \leq x \leq 1\}.$$
Man zeige, daß es ein $\xi \in [-1, 1]$ mit $f(\xi) = g(\xi)$ gibt.

**Abgabe** bis Montag, den 27. Januar 2020, $10^{00}$ Uhr (Kästen vor der Bibliothek).