MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 11
13.01.2020

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

41. Für die reellen Parameter λ, $\mu \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \lambda \sqrt{x^2 + 8} + \mu, & \text{für } x < -1, \\ (x - \lambda)\,(x - \mu), & \text{für } -1 \leq x \leq 1, \\ \lambda\,|x - 2| + \mu & \text{für } 1 < x, \end{cases}$$

gegeben.

   a) Man begründe ausführlich, daß f in allen Punkten $a \in \mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$ stetig ist.
   b) Man bestimme alle Paare $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, für die f stetig ist.

42. Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} 0, & \text{für } x < \sqrt{2}, \\ 1, & \text{für } x > \sqrt{2}, \end{cases}$$

auf ganz $\mathbb{Q}$ stetig ist.

43. Für eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gelte

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2) \qquad \text{für alle} \quad x_1, x_2 \in \mathbb{R}.$$

Man zeige:

   a) Es ist $f(0) = 0$ sowie $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
   b) Für alle $r \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}_0$ gilt $f(r \cdot n) = f(r) \cdot n$.
   c) Für alle $q \in \mathbb{Q}$ gilt $f(q) = f(1) \cdot q$.
   d) Ist f stetig im Punkt $a = 0$, so ist f eine stetige Funktion, und es gilt dann sogar $f(x) = f(1) \cdot x$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

44. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2005).* Gegeben sei die Funktion

$$f : [0, 2] \cap \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}, \quad f(x) = x^2 - 2.$$

   a) Man zeige, daß f eine stetige Funktion mit $f(0) < 0$ und $f(2) > 0$ ist, aber in $[0, 2] \cap \mathbb{Q}$ keine Nullstelle besitzt.
   b) Man erläutere, warum a) nicht dem Nullstellensatz widerspricht.

Abgabe bis Montag, den 20. Januar 2020, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).