Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

25. Gegeben sei die Folge $(a_n)_{n\geq 2}$ mit $\quad a_n = \dfrac{4\,n}{(n^2-1)^2} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

    a) Man zeige
    $$\sum_{k=2}^{n} a_k = \frac{5}{4} - \left(\frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2}\right)$$
    und
    $$\sum_{k=2}^{n} (-1)^k\, a_k = \frac{3}{4} + (-1)^n \cdot \frac{2\,n+1}{n^2\,(n+1)^2}$$
    für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq 2$.

    b) Man untersuche die Reihen $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} a_n$ und $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n\, a_n$ jeweils auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihre Summen.

26. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2000).*

    a) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n}$ konvergiert.

    b) Man zeige $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} = \frac{1}{1+x^2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

27. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2012).* Für $n \in \mathbb{N}$ werde die n–te Partialsumme
    $$s_n = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{3x}{x^2+2}\right)^k$$
    betrachtet. Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Folge der Partialsummen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und gebe den Grenzwert von $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ an.

28. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014).* Es sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_1 = f_2 = 1$ und
    $$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \qquad \text{für alle} \quad n \geq 2$$
    rekursiv definierte Fibonacci–Folge. Man zeige:

    a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\quad f_n \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

    b) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad a_n = \displaystyle\prod_{k=1}^{n} \frac{f_k}{f_{k+1}} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ konvergiert gegen 0.

    c) Die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{f_n}$ konvergiert.

Abgabe bis Montag, den 9. Dezember 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).