

## Übungen zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

21. Man bestimme die Häufungspunkte der Folgen  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und  $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$  mit

$$a_n = \frac{n + (-1)^n \cdot (3n + 1)}{n} \quad \text{und} \quad b_n = (-1)^n + \cos\left(\frac{n\pi}{4}\right).$$

22. Für die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  reeller Zahlen gebe es eine Konstante  $q \in [0, 1[$  mit der Eigenschaft  $|a_{n+1} - a_n| \leq q \cdot |a_n - a_{n-1}|$  für alle  $n \in \mathbb{N}$ .

a) Man zeige  $|a_{n+1} - a_n| \leq q^n \cdot |a_1 - a_0|$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$ .

b) Man zeige  $|a_{n+k} - a_n| \leq q^n \cdot \frac{|a_1 - a_0|}{1 - q}$  für alle  $k \in \mathbb{N}_0$ .

c) Man zeige, daß  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  eine Cauchyfolge ist.

23. Für eine Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  reeller Zahlen beweise man:

a) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn die Teilfolgen  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergieren und denselben Grenzwert besitzen.

b) Die Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  ist genau dann konvergent, wenn die Teilfolgen  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$ ,  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  und  $(a_{3k})_{k \in \mathbb{N}}$  konvergieren.

24. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2007*). Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 1 + \frac{1}{a_n} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ .

a) Man zeige, daß die Teilfolge  $(a_{2k-1})_{k \in \mathbb{N}}$  monoton wachsend und die Teilfolge  $(a_{2k})_{k \in \mathbb{N}}$  monoton fallend ist.

b) Man zeige die Konvergenz der Folge  $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$  und bestimme ihren Grenzwert.

**Abgabe** bis Montag, den 2. Dezember 2019, 10<sup>00</sup> Uhr (Kästen vor der Bibliothek).