MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 5
18.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

17. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Man zeige, daß für jede Wahl des Startwerts $a_0 \in [0,3]$ die durch die Rekursion

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}\left(a_n^2 + 6\right) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimme jeweils den Grenzwert.

18. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2014).* Für einen beliebigen Startwert $a_0 \in \mathbb{R}$ betrachte man die durch

$$a_{n+1} = a_n^2 - a_n + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man zeige:

a) Für alle Startwerte $a_0 \in \mathbb{R}$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ monoton wachsend.

b) Für alle Startwerte $a_0 \in [0,1]$ konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ gegen den Grenzwert 1.

c) Für alle Startwerte $a_0 \notin [0,1]$ ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$.

19. *(Staatsexamensaufgabe Herbst 2002).* Sei $z \in \mathbb{Z}$. Man berechne:

a) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n \cdot \left(1 - \left(1 + \frac{z}{n}\right)^2\right)$.

b) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2n+2}$.

c) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{z}{n}\right)^{2k}$.

20. Es seien $0 < a_1 < b_1$ fest gewählt. Man betrachte die beiden über die Rekursion

$$a_{n+1} = 2 \cdot \frac{a_n \cdot b_n}{a_n + b_n} \qquad \text{und} \qquad b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Man zeige, daß $([a_n, b_n])_{n\in\mathbb{N}}$ eine Intervallschachtelung ist, und bestimme das dadurch definierte Element $r \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} [a_n, b_n]$.

Abgabe bis Montag, den 25. November 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).