MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 4
11.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

13. *(nach Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Man betrachte die durch

$$a_0 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + 1 \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}_0$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$. Man zeige

a) zum einen über eine explizite Darstellung der Folgenglieder

b) und zum anderen mit Hilfe des Hauptsatzes über monotone Folgen,

daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert, und bestimme den Grenzwert.

14. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2009).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = \frac{7}{2} \quad \text{und} \quad a_{n+1} = 5 - \sqrt{11 - 2\,a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige $1 \leq a_n \leq 5$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

b) Man beweise, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Man bestimme den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

15. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2005).* Gegeben sei die durch

$$a_1 = 1 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{1 + a_n^2}{2 + a_n} \quad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge.

a) Man zeige, daß $a_n > \frac{1}{2}$ für alle $n \geq 1$ gilt.

b) Man untersuche die Folge (a_n) auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls den Grenzwert.

16. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012).*

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine gegen a konvergente Folge reeller Zahlen. Man zeige, daß dann auch die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$b_n = \frac{1}{2}\,(a_n + a_{n+1}) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

gegen a konvergiert.

b) Man finde eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die nicht konvergiert, so daß die zugehörige Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

c) Sei vorausgesetzt, daß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wächst und daß $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Man zeige, daß dann auch $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Abgabe bis Montag, den 18. November 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).