MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 3
04.11.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

9. Für ein fest gewähltes $k \in \mathbb{N}$ mit $k \geq 2$ werde die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{(1+n)^k - (n^k + k\, n^{k-1})}{(n+3)^3} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

betrachtet.

   a) Man zeige für $k = 5$, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert, und bestimme ihren Grenzwert.

   b) Man untersuche das Konvergenzverhalten der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Abhängigkeit von $k \neq 5$.

10. Man untersuche in Abhängigkeit von den Parametern $x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$ und $y \in \mathbb{R}$ die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = \frac{1-x^n}{1+x^n} \qquad \text{und} \qquad b_n = \frac{y^n}{1+y^{2n}}$$

auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert.

11. a) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1997).* Man berechne den Grenzwert der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = (3\,n+1)\left(\sqrt{n^2} - \sqrt{n^2+1}\right)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

    b) *(Staatsexamensaufgabe Herbst 1996).* Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \sqrt{n^2+2\,n} - n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Konvergenz, und bestimme gegebenenfalls deren Grenzwert.

12. Für Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen beweise man:

   a) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann divergent, wenn auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ divergent ist.

   b) Ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genau dann bestimmt divergent gegen $+\infty$, wenn auch $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt divergent gegen $+\infty$ ist.

Abgabe bis Montag, den 11. November 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).