MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 2
28.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

5. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2015).* Es sei $r > 0$ eine fest gewählte reelle Zahl. Man zeige, dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{\sqrt{r\,n}}{1 + r\sqrt{n}} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$
einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt und bestimme für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit
$$|a_n - a| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad n \geq n_0.$$

6. Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergente Folgen reeller Zahlen mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$. Man betrachte ferner die Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen definiert durch
$$c_n = \min\{a_n, b_n\} \qquad \text{und} \qquad d_n = \max\{a_n, b_n\}.$$
Man zeige, daß die beiden Folgen $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergieren, und bestimme jeweils den Grenzwert.

7. Man zeige, daß die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit
$$a_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (n+6)^2 + (n+7)^2}{n^2}$$
und
$$b_n = \frac{(n+1)^2 + (n+2)^2 + \ldots + (2n-1)^2 + (2n)^2}{n^3}$$
konvergieren, und bestimme ihren Grenzwert.

8. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2011).* Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen werde die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der arithmetischen Mittelwerte
$$b_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} a_k \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$
betrachtet; ferner sei $a \in \mathbb{R}$. Man zeige:
   a) Konvergiert $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a, so konvergiert auch $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen a.
   b) Konvergiert $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so muß $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht notwendig konvergieren.

Abgabe bis Montag, den 4. November 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).