MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2019/20
Blatt 1
21.10.2019

Übungen zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. Gegeben seien die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen mit

$$a_n = \frac{n-1}{n+1} \quad \text{bzw.} \quad b_n = \frac{n-1}{n^2+1} \quad \text{bzw.} \quad c_n = \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n} k$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Man untersuche die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Monotonie und Beschränktheit.

   b) Man weise jeweils anhand der Definition die Konvergenz der Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach.

2. Gegeben sei $\quad a_n = \sum_{k=1}^{n} (-1)^k \frac{2\,k+1}{k(k+1)} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   a) Man zeige $\quad a_n = -1 + \frac{(-1)^n}{n+1} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

   b) Man zeige, daß die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert $a \in \mathbb{R}$ besitzt, und bestimme ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n - a| < 10^{-4}$ für alle $n \geq n_0$.

3. a) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad a_n = \frac{n^n}{n!} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und Beschränktheit. Besitzt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ einen Grenzwert?

   b) Man untersuche die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\quad b_n = \frac{n!}{n^n} \quad$ für alle $n \in \mathbb{N}$ auf Monotonie und Konvergenz. Ist $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt?

4. Man betrachte die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reeller Zahlen. Man beweise oder widerlege folgende Aussagen.

   a) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist auch die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

   b) Sind die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend, so ist auch die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend.

   c) Ist die Folge $(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

   d) Ist die Folge $(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, so ist die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ oder die Folge $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt.

Abgabe bis Montag, den 28. Oktober 2019, 10^{00} Uhr (Kästen vor der Bibliothek).