MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Klausur
31.03.2016

Klausur zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

1. a) Man untersuche die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$a_n = n \cdot \left(\sqrt{n^2 + \alpha\, n + 1} - n\right) \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

in Abhängigkeit vom Parameter $\alpha \in \mathbb{R}_0^+$ auf Konvergenz und bestimme gegebenenfalls ihren Grenzwert. (2)

b) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}^+$, für die die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln x)^n}{n}$$

konvergiert. (2)

c) Man bestimme alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{2^{n+1}}$$

konvergiert, und berechne hierfür ihre Summe. (2)

2. Man betrachte die durch

$$a_1 = 2016 \qquad \text{und} \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^3 + 4}{a_n^2 + 1} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}$$

rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

a) Man zeige:

- Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n > 4$. (1)
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist streng monoton fallend. (1)
- Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen den Grenzwert 4. (1)

b) Man untersuche mit Hilfe der Ergebnisse von a) die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{a_n}{n}$$

auf Konvergenz und absolute Konvergenz. (3)

3. Gegeben sei die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x} + \cos(\pi x).$$

Man zeige:

   a) Für den Wertebereich W_f von f gilt $W_f = \,]-1, +\infty[$. (2)

   b) Die Funktion f besitzt unendlich viele Nullstellen. (2)

   c) Für die Ableitung f' gilt $f'(x) < 0$ für alle $x < -\ln \pi$. (2)

4. Man entscheide in jeder der drei Teilaufgaben, ob es eine Funktion gibt, welche die gewünschten Eigenschaften besitzt. Man gebe jeweils eine solche Funktion an oder begründe, warum es eine solche Funktion nicht geben kann.

   a) Die Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ ist differenzierbar und besitzt den Wertebereich $W_f = \,]-1, 1[$. (2)

   b) Die Funktion $f : \,]-1, 1[\, \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar, aber ihr Quadrat $f^2 : \,]-1, 1[\, \to \mathbb{R}$, $f^2(x) = (f(x))^2$, ist differenzierbar. (2)

   c) Die Funktion $f : \,]-1, 1[\, \to \mathbb{R}$ ist umkehrbar und differenzierbar, und ihre Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \to \mathbb{R}$ ist nicht differenzierbar. (2)