

Tutorium zur Vorlesung „Differential- und Integralrechnung I“

53. Man bestimme jeweils die Ableitung der folgenden Funktionen:

a) $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = 3x^2 - 4 \ln|x| - \frac{2}{x^2}$

b) $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x \cdot \ln(x^2 + 1)$

c) $h : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{(\ln x)^2 + 1}{x}$

d) $k :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}, \quad k(x) = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad \text{mit } a > 0$

54. Man begründe, daß die beiden Funktionen

$$f : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = x^x, \quad \text{und} \quad g : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, \quad g(x) = x^{\frac{1}{x}},$$

differenzierbar sind, und bestimme ihre Ableitungen.

55. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*).

a) Man zeige, daß die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$ stetig, aber nicht differenzierbar ist.

b) Man zeige, daß die Funktion

$$g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \cos \frac{1}{x}, & \text{für } x \neq 0, \\ 0, & \text{für } x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $a = 0$ stetig und differenzierbar ist.

56. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2008*). Es sei $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion mit $g(0) = 0$. Man zeige, daß dann auch die Funktion

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad h(x) = |x| \cdot g(x)$$

stetig differenzierbar ist.