

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I“

45. Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2 + 1}, & \text{für } x < -1, \\ -1, & \text{für } x = -1, \\ x^2 - 2x - 4, & \text{für } x > -1. \end{cases}$$

- a) Man zeige, daß f stetig ist.
- b) Man berechne die Grenzwerte von $f(x)$ für $x \rightarrow \pm\infty$ und bestimme den Wertebereich W_f von f .
- c) Man begründe, daß die Einschränkung $f|_{[1, \infty[}$ von f auf das Intervall $[1, \infty[$ umkehrbar ist, und gebe die Umkehrfunktion explizit an.

46. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x} + 1}$.

- a) Man zeige, daß f stetig und streng monoton wachsend ist.
- b) Man bestimme den Wertebereich W_f von f .
- c) Man gebe die Umkehrfunktion $f^{-1} : W_f \rightarrow \mathbb{R}$ explizit an. Ist f^{-1} stetig?

47. Seien $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsende Funktionen. Man beweise oder widerlege:

- a) Die Funktion $f + g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.
- b) Die Funktion $f \cdot g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton wachsend.
- c) Die Funktion $-f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ist monoton fallend.
- d) Ist f nullstellenfrei, so ist die Funktion $\frac{1}{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton fallend.

48. (*Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2012*). Es sei $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende, stetige Funktion sowie $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton fallende, stetige Funktion mit

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = +\infty.$$

Man zeige, daß die Graphen von f und g einen Schnittpunkt besitzen.