MATHEMATISCHES INSTITUT
DER UNIVERSITÄT MÜNCHEN
Dr. E. Schörner

WS 2015/16
Blatt 11
11.01.2016

Tutorium zur Vorlesung „Differential– und Integralrechnung I"

41. Gegeben sei die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x^3 + x + 1| + \sqrt{x^4 + 1}$.
    a) Man zeige, daß f eine stetige Funktion ist.
    b) Man zeige, daß f eine Nullstelle besitzt, und gebe ein Intervall der Länge 1 an, in dem eine Nullstelle von f liegt.
    c) Man bestimme ein Intervall der Länge $\frac{1}{2}$, in dem f eine Nullstelle besitzt.

42. Seien f, $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen mit $f(a) < g(a)$ und $f(b) > g(b)$.
    a) Man zeige, daß die beiden Graphen G_f und G_g mindestens einen Schnittpunkt besitzen.
    b) Man gebe für $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2\,x+1$, und $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2$, einen Schnittpunkt von G_f und G_g explizit an.
    c) Man zeige, daß die Graphen der Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x - \sqrt{x^4 + 1}$, und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g(x) = x^2 - 2$, mindestens zwei Schnittpunkte besitzen.

43. *(Staatsexamensaufgabe Frühjahr 2006).* Seien a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a < b < c$. Man beweise, daß die Gleichung
$$\frac{1}{x-a} + \frac{2}{x-b} + \frac{3}{x-c} = 0$$
in den Intervallen $]a, b[$ und $]b, c[$ jeweils mindestens eine Lösung besitzt.

44. a) Man betrachte eine stetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ mit
$$f(x) > 0 \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]\,.$$
Man zeige, daß es ein $\varepsilon > 0$ gibt, so daß
$$f(x) \geq \varepsilon \qquad \text{für alle} \qquad x \in [-1, 1]$$
gilt.
    b) Man zeige, daß die Aussage von a)
    - sowohl für eine unstetige Funktion $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$
    - als auch für eine stetige Funktion $f :]-1, 1[\to \mathbb{R}$

    im allgemeinen falsch ist.